გარდაქმნათა ჯგუფების შესახებ

ალგებრის ძირითადი კურსიდან კარგადაა ცნობილი ჯგუფის ცნება. კომუტაციურ ჯგუფს ხშირად ეწოდება აბელური ჯგუფი. კერძოდ, აბელური ჯგუფია ნებისმიერი რგოლის ადიციური ჯგუფი, ნებისმიერი ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფი და ნებისმიერი ვექტორული სივრცის ადიციური ჯგუფი. არააბელურ ჯგუფთა უმნიშვნელოვანესი მაგალითები ჩნდება გარდაქმნათა ჯგუფების სახით.

X სიმრავლის ყოვლგვარ ასახვას თავის თავში ეწოდება ამ სიმრავლის გარდაქმნა. რადგან ორი $\varphi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ და $\psi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ გარდაქმნის $\varphi \cdot \psi$ კომპოზიცია კვლავ X სიმრავლის გარდაქმნაა, ამიტომ ასახვა, რომელიც გარდაქმნათა ნებისმიერ დალაგებულ წყვილს უთანადებს მათ კომპოზიციას X სიმრავლის ყველა გარდაქმნათა S(X) სიმრავლეზე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ბუნებრივი ბინარული ალგებრული ოპერაცია. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ოპერაცია შეიძლება აღმოჩნდეს არაკომუტაციური ($\varphi \cdot \psi \neq \psi \cdot \varphi$)

განსაზღვრება1. X სიმრავლის გარდაქმნათა ჯგუფი ეწოდება მის ნებისმიერ ბიექციურ გარდაქმნათა ისეთ G ერთობლიობას, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:

1) თუ $\varphi, \psi \epsilon$ G, მაშინ $\varphi\psi \epsilon$ G;
2) $id_X \epsilon$ G;
3) თუ $\varphi \epsilon$ G, მაშინ $\varphi^{-1} \epsilon$ G.

(აქ $\varphi\psi$ აღნიშნავს φ და ψ გარდაქმნათა ნამრავლს (კომპოზიციას), ხოლო id_X იგივურ გარდაქმნას).

მაგალითი 1. ყველა ბიექციურ გარდაქმნათა S(X) სიმრავლე ჯგუფია (ამ ოპერაციის ასოციაციურობა ცნობილია, ერთეულოვანი ელემენტია იგივური გარდაქმნა, ხოლო შებრუნებული ელემენტია შებრუნებული გარდაქმნა). როცა X სიმრავლე უსასრულოა, S(X) ჯგუფი მეტისმეტად დიდია, რომ იყოს საინტერესო. თუ X სიმრავლე სასრულია, მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\mathrm{X} = \{1,2, \dots, n\}$; ამ შემთხვევაში S(X) ჯგუფს ეწოდება **ჩასმათა ჯგუფი** ან n-ური ხარისხის **სიმეტრიული ჯგუფი** და S_n-ით აღინიშნება.

მაგალითი 2. ევკლიდური E^2 სიბრტყის (ევკლიდური E^3 სივრცის) მოძრაობები ქმნიან გარდაქმნათა ჯგუფს, რომელიც აღინიშნება Isom E^2-ით (შესაბამისად Isom E^3-ით).

ეს თვისება აქსიომაა ევკლიდური გეომეტრიის აქსიომატიკის იმ ვერსიაში, რომელშიც მოძრაობაა ერთ-ერთი განუსაზღვრელი ცნება. მეორე ვერსიაში, რომელიც საფუძვლად იღებს ორ წერტილს შორის მანძილს, მოძრაობა განისაზღვრება, როგორც მანძილების შემნახველი გარდაქმნა, ხოლო ზემოთ ჩამოყალიბებული თვისება მარტივი თეორემაა.

მაგალითი 3. წრფივ ასახვათა თვისებების გამო, V ვექტორული სივრცის ბიექციური წრფივი გარდაქმნები ქმნიან (V სიმრავლის) გარდაქმნათა ჯგუფს. მას ეწოდება V სივრცის **სრული წრფივი ჯგუფი** და GL(V)-თი აღინიშნება.

მაგალითი 4. ვექტორული V სივრცის **პარალელური გადატანა** $a \epsilon$V ვექტორით ვუწოდოთ გარდაქმნას t_a: V→ V, t_a:$x \mapsto x+a$. აჩვენეთ, რომ $t_a t_b = t_{a+b}$, $id_V = t_0$, $t_a{}^{-1} = t_{-a}$.   (1)

ფორმულები (1) გვიჩვენებს, რომ V სივრცის ყველა პარალელურ გადატანათა Tran(V) ერთობლიობა მისი გარდაქმნათა ჯგუფია. ■

გარდაქმნათა ჯგუფებში გამრავლების ოპერაციის თვისებების ანალიზის საფუძველზე მივიდვართ ჯგუფის ზოგად ცნებამდე, რომელიც აბელური ჯგუფის ცნებისაგან კომუტაციურობის მოთხოვნით განსხვავდება.

განსაზღვრება 2. არაცარიელ G=(G, ∗) სიმრავლეს ∗:G× G→ G, $(a, b) \mapsto a * b$ ბინარული ოპერაციით ეწოდება ჯგუფი, თუ

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ ყველა $a, b, c \epsilon$ G (**ასოციაციურობა**);

2) *არსებობს* ისეთი ელემენტი $n \epsilon$ G (**ნეიტრალური**), რომ $a * n = n * a = n$, ყველა $a \epsilon$ G;

3) **ყოველი** $a \epsilon$ G ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ელემენტი $x \epsilon$ G (**სიმეტრიული**), რომ $a * x = x * a = n$.

ჯგუფს ეწოდება **აბელური ან კომუტაციური, თუ** $a * b = b * a$, ყველა $a, b \epsilon$ G.

განსაზღვრება 3. ორი ჯგუფი **იზომორფულია** $(G,\cdot)\cong(H,*)$, თუ არსებობს ბიექცია $\varphi\colon G\to H$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $a,b\in G$-თვის სრულდება $(a\cdot b)\varphi=(a\varphi)*(b\varphi)$.

ჯგუფის თავის თავზე იზომორფულ $\varphi\colon (G,*)\to(G,*)$ ასახვას ეწოდება მისი **ავტომორფიზმი**.

განსაზღვრება 4. $(G,\cdot)$ ჯგუფის ყოველგვარ არაცარიელ $H\subseteq G$ ქვესიმრავლეს ეწოდება **ქვეჯგუფი**, თუ ის ჩაკეტილია გამრავლებისა და შებრუნების მიმართ, ე.ი.

1) თუ $a,b\in H$, მაშინ $ab\in H$;

2) თუ $a\in H$, მაშინ $a^{-1}\in H$.

თუ H G-ს ქვეჯგუფია, წერენ $H\leq G$. თუ $H\leq G$ და $H\neq G$, მაშინ წერენ $H<G$ (არ აგერიოთ სიმრავლეთა ჩართვის $\subseteq,\subset$ ნიშნებთან!).

ცხადია, რომ ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი თვითონაა ჯგუფი იგივე ოპერაციის მიმართ (ქვეჯგუფის მოცემული განსაზღვრება იყენებს მულტიპლიკაციურ ტერმინოლოგიას).

განსაზღვრებები 1 და 4 შედარებისას ჩვენ ვხედავთ, რომ X სიმრავლის გარდაქმნათა ნებისმიერი ჯგუფი ყველა გარდაქმნათა $S(X)$ ჯგუფის ქვეჯგუფია.

ამოცანა1. ვთქვათ, f რომელიღაც n-უცნობიანი პოლინომია. მაშინ

$\mathrm{Sym}\, f=\{a\in S_n \mid f(x_{1a},x_{2a},\dots,x_{na})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\}$ S_n ჯგუფის ქვეჯგუფია. მართლაც, ვთქვათ $a,b\in \mathrm{Sym}\, f$. თუ $x_{1a}=y_1, x_{2a}=y_2,\dots, x_{na}=y_n$, მაშინ $f(x_{1(ab)},x_{2(ab)},\dots x_{n(ab)})=f(y_{1b},y_{2b},\dots,y_{nb})=f(y_1,y_2,\dots,y_n)=f(x_{1a},x_{2a},\dots,x_{na})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

შემდეგ, თუ $a\in\mathrm{Sym}$ და $x_{1a^{-1}}=y_1, x_{2a^{-1}}=y_2,\dots, x_{na^{-1}}=y_n$, მაშინ $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_{1(a^{-1}a)}, x_{2(a^{-1}a)},\dots, x_{n(a^{-1}a)})=f(y_{1a},y_{2a},\dots,y_{na})=f(y_1,y_2,\dots,y_n)=f(x_{1a^{-1}}, x_{2a^{-1}},\dots, x_{na^{-1}})$.

სიმეტრიული პოლინომის განსაზღვრება ნიშნავს, $\mathrm{Sym}\, f=S_n$, ნაკლებად მდიდარ, მაგრამ არატრივიალური სიმეტრიის მქონე პოლინომის მაგალითად განვიხილოთ 4 უცნობიანი $f=x_1x_2+x_3x_4$

პოლინომი. ადვილი დასანახია, რომ Sym f შედგება 8 ჩასმისაგან, რომლებიც ინარჩუნებენ {1,2,3,4} სიმრავლის დაყოფას ორ {1,2} და {3,4} ქვესიმრავლედ. დასაშვებია, ამ ქვესიმრავლეთა გადანაცვლება და თითოეულ მათგანში ელემენტთა გადანაცვლება.

მაგალითი 5. ანალოგიურად, K^n სივრცის წრფივი გარდაქმნები, რომლებიც ინახავენ n უცნობის რომელიღაც მოცემულ პოლინომს, ქმნიან $GL_n(K)$ ჯგუფის ქვეჯგუფს. R^n სივრცის წრფივ გარდაქმნებს, რომლებიც ინახავენ $x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots x_n{}^2$ პოლინომს ($x\epsilon R^n$, $[x]=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ეწოდება **ორთოგონალური გარდაქმნები**; ისინი ქმნიან ქვეჯგუფს $GL_n(R)$-ში, რომელსაც ეწოდება **ორთოგონალური ჯგუფი** და $O_n(R)$-ით აღინიშნება.

ამოცანა 2. ვაჩვენოთ, რომ ევკლიდური E^2 სიბრტყის მოძრაობები, რომლებიც ადგილზე ტოვებენ o კოორდინატთა სათავეს, ქმნიან Isom E^2 ჯგუფის ქვეჯგუფს. ის H-ით აღვნიშნოთ. რადგან ვექტორთა ჯამი და მათი რიცხვზე ნამრავლი განისაზღვრებიან ინვარიანტულ გეომეტრიულ ტერმინებში, ამიტომ ყოველგვარი მოძრაობა, რომელიც o-ს ტოვებს ადგილზე, წრფივი გარდაქმნაა. უფრო მეტიც, რადგან ის ვექტორთა სიგრძეებს ინახავს, ამიტომ ის ორთოგონალური გარდაქმნაა. პირიქით, რადგან A და B წერტილებს შორის $|AB|$მანძილი $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ ვექტორის სიგრძეა, გვექნება, რომ ყოველგვარი ორთოგონალური გარდაქმნა ინახავს წერტილებს შორის მანძილებს და, მაშასადამე, მოძრაობაა.

ამგვარად, $H=O_2$. ანალოგიურად, ევკლიდური E^3 სივრცის მოძრაობათა ჯგუფი, რომელიც უძრავად ტოვებს კოორდინატთა სათავეს, O_3-ს ემთხვევა.

მაგალითი 6. ვთქვათ, F რაიმე ფიგურაა ევკლიდურ სიბრტყეზე. მაშინ

$$\text{Sym } F=\{\varphi \in \text{Isom } E^2 \mid F\varphi = F\}$$

Isom E^2 ჯგუფის ქვეჯგუფია; მას ეწოდება F ფიგურის სიმეტრიის ჯგუფი. წრეწირის o ცენტრით კოორდინატთა სათავეში სიმეტრიის ჯგუფია O_2. წესიერი n-კუთხედის **ცენტრით** o **წერტილში** სიმეტრიის ჯგუფი O_2 ჯგუფის ქვეჯგუფია. ის შედგება $\frac{2\pi}{n}$-ის ჯერადი კუთხეების o წერტილის გარშემო ბრუნვებისაგან და იმ წრფეების მიმართ არეკვლებისაგან, რომლებიც გადიან o წერტილზე და ერთ-ერთ წვეროზე ან ერთ-ერთი გვერდის შუა წერტილზე. ამგვარად,

ეს ჯგუფი შეიცავს $2n$ ელემენტს (n ბრუნვა და n არეკვლა); მას ეწოდება **დიედრის ჯგუფი** და D_n-ით აღინიშნება.

მათემატიკოსებმა XIX საუკუნეში დაინახეს, რომ ევკლიდური გეომეტრია არ არის ერთადერთი შესაძლებელი გეომეტრია. იმ შემთხვევებშიც კი, თუ მივიღებთ, რომ ,,სივრცე, რომელშიც ჩვენ ვცხოვრობთ" ემორჩილება ევკლიდური გეომეტრიის კანონებს, აზრი აქვს სხვა იმ სივრცეების გეომეტრიის შესწავლას, რომელიც მათემატიკური აგებების შედეგად ჩნდებიან. ამასთან დაკავშირებით გასარკვევია როგორი გეომეტრია უნდა გავიგოთ ასეთ შემთხვევაში. თუ განვაზოგადებთ ევკლიდური გეომეტრიის სხვადასხვა ცნებებს, მაშინ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ამ შეკითხვაზე განსხვავებული პასუხები.

კერძოდ, ევკლიდური გეომეტრიის მოძრაობათა ჯგუფის ცნების განზოგადების შედეგად გერმანელ მათემატიკოსმა კლაინმა მის 1872 წლის ლექციაში, რომელიც გახდა ცნობილი სახელწოდებით „ერლანგენის პროგრამა", მოგვცა გეომეტრიის განსაზღვრება, როგორც ფიგურათა თვისებების შესწავლა, რომლებიც ინვარიანტულია მოცემული გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

უფრო დაწვრილებით, ვთქვათ მოცემულია რაიმე X სიმრავლე და მისი რომელიღაც გარდაქმნათა G ჯგუფი. ჩავთვალოთ G ჯგუფის მიმართ ფიგურა $F_1 \subset X$ **ეკვივალენტური** (ან **ტოლი**, როგორც ამბობენ ელემენტარულ გეომეტრიაში) $F_2 \subset X$ ფიგურის და დავწერთ $F_1 \sim F_2$ თუ არსებობს ისეთი $\varphi \in G$ გარდაქმნა, რომ $F_2 = F_1\,\varphi$. შევამოწმოთ, რომ ეს მართლაც ეკვივალენტობის მიმართებაა;

1) $F \sim F$, რადგან $F = F\mathrm{id}_X$ და $\mathrm{id}_X \in G$;

2) თუ $F_1 \sim F_2$, ე.ი $F_2 = F_1\,\varphi$, სადაც $\varphi \in G$, მაშინ $F_2 \sim F_1$, რადგან $F_1 = F_2\varphi^{-1}$ და $\varphi^{-1} \in G$;

3) თუ $F_1 \sim F_2$ და $F_2 \sim F_3$, სადაც $\varphi, \psi \in G$, მაშინ $F_1 \sim F_3$ რადგან $F_3 = F_1(\varphi\psi)$და $\varphi\psi \in G$.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ეკვივალენტობის მიმართების სამი აქსიომა ზუსტად შეესაბამება გარდაქმნათა ჯგუფის სამ აქსიომას.

გეომეტრიის ერთ-ერთი ამოცანაა ფიგურათა ეკვივალენტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების მოძებნა (გავიხსენოთ სამკუთხედთა ტოლობის ნიშნები ევკლიდურ გეომეტრიაში). ამ მიზანს ემსახურება ის სიდიდეები, რომლებიც ინვარიანტულია გარდაქმნათა მიმართ G ჯგუფიდან (ისეთები,როგორც ორ წერტილს შორის მანძილი ან კუთხის ზომა ევკლიდურ გეომეტრიაში). ამ ინვარიანტებს შორის კავშირია გეომეტრიული თეორემები (მაგალითად,პითაგორას თეორემა ან თეორემა იმის შესახებ, რომ სამკუთხედის მედიანები იკვეთება ერთ წერტილში).

გასაგებია, რომ ნებისმიერ გარდაქმნათა ჯგუფი ვერ მიგვიყვანს საინტერესო და გამოყენებებისათვის მნიშვნელოვან გეომეტრიამდე. ყველა ასეთი გეომეტრია დაკავშირებულია საკმაოდ მდიდარ გარდქმნათა ჯგუფებთან, რომლებიც არც ისე ბევრია. აქ მინიმალური მოთხოვნაა **ტრანზიტულობა**.

განსაზღვრება 5. მოცემული X სიმრავლის გარდაქმნათა G ჯგუფს ეწოდება ტრანზიტული, თუ ნებისმიერი $x, y \in X$- თვის არსებობს ისეთი $\varphi \in G$ გარდაქმნა, რომ $y = x\varphi$. ცხადია,რომ თუ G ჯგუფის რომელიმე ქვეჯგუფი ტრანზიტულია, მაშინ G-ც ტრანზიტულია.

ეს ნიშნავს, რომ შესაბამის გეომეტრიაში ყველა წერტილი ეკვივალენტურია ზემოთ განსაზღვრული ფიგურათა ეკვივალენტობის განსაზღვრების აზრით.

მაგალითი 7. ვექტორული V სივრცის პარალელურ გადატანათა Tran(V) ჯგუფი (იხ. მაგალითი 4) ტრანზიტულია. მართლაც, ნებისმიერი x და y-თვის V-დან გვაქვს $y = xt_{y\text{-}x}$, მაგრამ Tran(V) ჯგუფი ჯერ კიდევ მეტისმეტად მცირეა იმისათვის, რომ განისაზღვროს საინტერესო გეომეტრია. ევკლიდური გეომეტრიისაგან განსხვავებული საინტერესო გეომეტრიის მაგალითად მოვიყვანოთ აფინური გეომეტრია.

ვთქვათ, V რაიმე ვექტორული სივრცეა, $\varphi \in GL(V)$ და $a \in V$, მაშინ

$\varphi^{-1} t_a \varphi = t_{a\varphi}$ (2)

მართლაც, ნებისმიერი x-თვის V-დან გვაქვს

$x(\varphi^{-1}t_a\varphi)$=($x\varphi^{-1}$) $t_a\varphi$=($x\varphi^{-1}$+ a) φ=$x+\ a\varphi$=$t_{a\varphi}$.

თეორემა 1. ნებისმიერი G≤ GL(V)ჯგუფისათვის სიმრავლე G · Tran(V)={φt_a| $a\epsilon$V, $\varphi\epsilon$G} V სივრცის გარდაქმნათა ტრანზიტული ჯგუფია.

□ ვთქვათ, a,$b\epsilon$V; $\varphi,\psi\epsilon$ GL(V). თუ გამოვიყენებთ (1),(2) ფორმულებს, გვექნება

$(\varphi t_a)(\ \psi t_b)$= $\varphi(\psi\psi^{-1})t_a(\psi t_b)$=($\varphi\psi)(\psi^{-1}t_a\psi)t_b$=$(\varphi\psi)(\ t_{a\psi}t_b)$ = $(\varphi\psi)t_{a\psi+b}\epsilon$ G · Tran(V)

აქედან გამომდინარეობს, რომ G · Tran(V) სიმრავლის ერთეულოვანი ელემენტია $id_V\cdot\ t_0$ და $(\varphi t_a)^{-1}$=$\varphi^{-1}t_{-a\varphi^{-1}}$. ამგვარად, G · Tran(V) ვექტორული V სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფია. ის ტრანზიტულია, რადგან უკვე ტრანზიტულია მისი Tran(V) ქვეჯგუფი. □

კერძოდ, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ G= GL(V). მიღებულ

GA(V)= GL(V) · Tran(V)

(3) ჯგუფს ეწოდება ვექტორული V სივრცის **სრული აფინური** ჯგუფი, ხოლო მის ელემენტებს **ბიექციური აფინური** გარდაქმნები. მასთან დაკავშირებულ გეომეტრიას ეწოდება **აფინური გეომეტრია**.

იმ შემთხვევაში, როცა V=E^2 ჩვენ ვღებულობთ ევკლიდური სიბრტყის აფინურ გეომეტრიას.

თეორემა 2. ევკლიდური სიბრტყის მოძრაობათა IsomE^2 ჯგუფი GA(E^2) ჯგუფის საკუთრივი ქვეჯგუფია და IsomE^2= O_2 · Tran(E^2)

□ უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ყველა პარალელური გადატანა და ყველა ორთოგონალური გარდაქმნა მოძრაობებია. ვთქვათ, ახლა

fϵIsomE^2 რაიმე მოძრაობაა და a=of (o კოორდინატთა სათავეა), მაშინ მოძრაობა φ=f t_a^{-1} $=$ ft_{-a}ადგილზე ტოვებს კოორდინატთა o სათავეს და, მაშასადამე, მიეკუთვნება O_2 ჯგუფს. ამგვარად, f $=\varphi t_{-a}^{-1}$ = $\varphi t_a\epsilon O_2$ · Tran(E^2) და IsomE^2 $=O_2$ · Tran(E^2) . □

შედეგი. თუ ფიგურები $F_1, F_2 \subset E^2$ ტოლია ევკლიდურ გეომეტრიაში, მაშინ ისინი ტოლია აფინურ გეომეტრიაშიც.

შენიშვნა. სრული აფინური $\mathrm{GA}(E^2)$ ჯგუფი არ ემთხვევა მოძრაობათა $\mathrm{Isom}E^2$ ჯგუფს: $\mathrm{Isom}E^2 < \mathrm{GA}(E^2)$. აფინური გარდაქმნის მაგალითად, რომელიც არაა მოძრაობა, გამოდგება ჰომოტეტია (კოეფიციენტი$\neq\pm1$) ან რომელიმე ღერძის გასწვრივ გაჭიმვა. ამგვარად, $\mathrm{GA}(E^2)$ ჯგუფი უფრო მდიდარია, ვიდრე მოძარობათა $\mathrm{Isom}E^2$ ჯგუფი და ამიტომ არატოლი ფიგურები ევკლიდურ გეომეტრიაში შეიძლება აღმოჩნდნენ ტოლი აფინურ გეომეტრიაში. ასე მაგალითად, აფინურ გეომეტრიაში ყველა წრეწირი ტოლია.

ამოცანა 3. აფინურ გეომეტრიაში ყველა სამკუთხედი ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ $V^n=\mathcal{L}(e_1,..,e_n)$, $W^n=\mathcal{L}(\mathfrak{f}_1,..,\mathfrak{f}_m)$, $\mathcal{A}: V^n \to W^n$- წრფივი ასახვაა. $x \mapsto \mathcal{A}\, x=\alpha_1(\mathcal{A}e_1)+...+\alpha_n(\mathcal{A}e_n)$ $\mathcal{A}e_1,\dots \mathcal{A}e_n \epsilon \mathrm{M}$.

$\mathcal{A}e_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}\,\mathfrak{f}_i$ (j=1,..n)

მეორე მხრივ x ვექტორის $\mathcal{A}x$ ანასახს, რომელიც M-ს ეკუთვნის, აქვს $\mathfrak{f}_1,..,\mathfrak{f}_m$ ბაზისში, რომელიღაც $\beta_1,..,\beta_m$ კოორდინატები, ე.ი $\mathcal{A}x=\sum_{i=1}^m \beta_i\,\mathfrak{f}_i$

ამგვარად,

$\mathcal{A}x=\sum_{j=1}^m \alpha_j(\mathcal{A}e_j)= \sum_{j=1}^n \alpha_j(\sum_{i=1}^m a_{ij}\,\mathfrak{f}_i)=\sum_{i=1}^m(\sum_{i=1}^n a_{ij}\,\alpha_j)\,\mathfrak{f}_i=\sum_{i=1}^m \beta_i\,\mathfrak{f}_i$.

თუ $[\alpha]=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $[\beta]=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$[\beta]=\mathcal{A}[\alpha]$

ეს ფორმულა იძლევა წრფივი ასახვის მოქმედების ცხადად გამოსახვას არჩეული კოორდინატების (ე.ი ბაზისის მიხედვით).

კერძოდ, თუ n=m, მაგალითად, W სივრცე V-ს ემთხვევა, მაშინ ეს იძლევა საშუალებას კოორდინატთა ცვლილების ფორმულებით ინტერპრეტირებული იქნას, როგორც წრფივი გარდაქმნა $\mathcal{A}: V^n \to V^n$

ჯგუფის მოსაზღვრე კლასებად დაყოფა ბუნებრივად ჩნდება გარდაქმნათა ჯგუფის შესწავლისას.

ვთქვათ, X სიმრავლის გარდაქმნათა ჯგუფია G. ვიტყვით, რომ $x, y \epsilon$ X წერტილები ეკვივალენტურია G-ს მიმართ და ვწერთ $x \sim y$, თუ არსებობს ისეთი $g \epsilon$G ელემენტი, რომ $y= xg$. ეს ზემოთ განსაზღვრული ფიგურათა ეკვივალენტობის კერძო შემთხვევაა და, მაშასადამე, ეკვივალენტობის მიმართება. ეკვივალენტობის კლასს

xG={$y \epsilon$ X| $\exists g \epsilon$G, $y= xg$}={ xg| $g \epsilon$G}$\subseteq$ X,

რომელიც წარმოქმნილია $x \epsilon$X წერტილის მიერ, ეწოდება მისი **ორბიტა**. კერძოდ, გარდაქმნათა ტრანზიტულ ჯგუფებს (იხ. განსაზღვრება 5. აქვთ ერთადერთი ორბიტა).

ქვეჯგუფს

G_x={ $g \epsilon$G| xg=x}$\leq$G

ეწოდება $x \epsilon$X წერტილის **სტაბილიზატორი** G-ში.

მაგალითი 8. ევკლიდური სიბრტყის მოძრაობათა IsomE^2 ჯგუფი ტრანზიტულია. კოორდინატთა სათავის სტაბილიზატორია ორთოგონალური O_2 ჯგუფი.

მაგალითი 9. ორთოგონალური O_2 ჯგუფის ორბიტები წრეწირებია ცენტრით კოორდინატთა o სათავეში და თვით o წერტილი. კოორდინატთა სათავისაგან p≠0 წერტილის სტაბილიზატორი შედგება იგივური გარდაქმნისა და op წრფის მიმართ არეკვლისაგან, ხოლო o წერტილის სტაბილიზატორია მთელი O_2 ჯგუფი.

მაგალითი 10. სიმეტრიულ S_n ჯგუფი ტრანზიტულია X={1,2,...,n} სიმრავლეზე.სიმბოლო n-ის სტაბილიზატორია S_n ჯგუფში ქვეჯგუფი

H$\cong$ S_{n-1}.

თეორემა 3. გვაქვს xG ორბიტის ურთიერთცალსახა ასახვა მარჯვენა მოსაზღვრე G/G_x კლასთა სიმრავალზე, სადაც ყოველ $y= xg \epsilon$ xG წერტილს შეესაბამება მოსაზღვრე $G_x g$ კლასი.

დამტკიცება. როცა $g_1, g_2 \epsilon$G გვექნება $g_1 \equiv g_2 (\mathrm{mod}\ G_x) \Leftrightarrow g_1 {g_2}^{-1} \epsilon G_x \Leftrightarrow$ $x(g_1 {g_2}^{-1}) \Leftrightarrow xg_1= xg_2$. ამგვარად, G-ს G_x-ის მიმართ ერთი მარჯვენა

მოსაზღვრე $G_x g$ კლასის ელემენტები ხასიათდებიან იმით, რომ მათ x წერტილი გადაყავთ ერთი და იმავე წერტილში. უფრო ზუსტად, მოსაზღვრე $G_x g$ კლასის ყველა ელემენტს და მხოლოდ მათ გადაჰყავს x წერტილი $y= xg$ წერტილში. ამით დადგენილია საძიებელი თანადობა.□

თუ xG ორბიტის ელემენტთა რიცხვი სასრულია, მაშინ მას მისი სიგრძე ეწოდება და $|x\mathrm{G}|$-ით აღინიშნება.

შედეგი. თუ G სასრული ჯგუფია, მაშინ $|\mathrm{G}|=|x\mathrm{G}|\cdot|G_x|$. (4)

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ერთი ორბიტის ყველა წერტილის სტაბილიზატორთა რიგები ტოლია, რადგან $|\mathrm{G}|=|(xg)\mathrm{G}|\cdot|G_{xg}|$. სინამდვილეში არსებობს ზუსტი კავშირი ერთი სიბრტყის ელემენტთა სტაბილიზატორებს შორის, რომელიც არ არის დამოკიდებული G ჯგუფის სასრულობაზე.

წინადადება 1. ნებისმიერი $x\epsilon \mathrm{X}$ და ნებისმიერი $g\epsilon$ G ადგილი აქვს ტოლობას $G_{xg}=g^{-1}G_x\, g$.

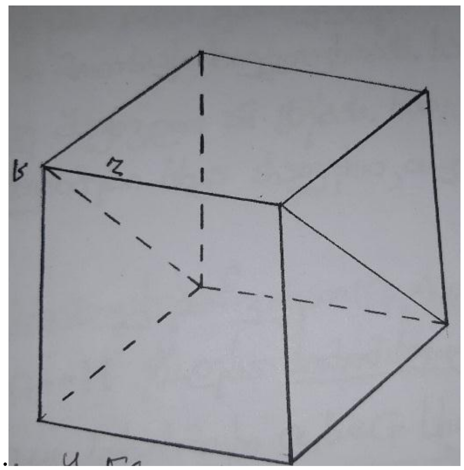
დამტკიცება. თუ ნებისმიერი $a\epsilon G_{xg}$, ე.ი $(xg)a= xg$, მაშინ $x(gag^{-1})=((xg)a)\, g^{-1}=(xg)\, g^{-1}=x$. ამგვარად, $gG_{xg}g^{-1} \subseteq G_x$ ან, რაც იგივეა, $G_{xg} \subseteq g^{-1}G_x\, g$. პირიქით, თუ ნებისმიერი $b\epsilon g^{-1}G_x\, g$, მაშინ $b=g^{-1}cg$ რომელიღაც c-თვის G_x-დან და $(xg)b= (xg)(\,g^{-1}cg)=(((xg)\, g^{-1})\, c)\, g=(xc)\, g= xg$, ე.ი $b=g^{-1}cg\epsilon G_{xg}$ და ამიტომ $g^{-1}G_x\, g \subseteq G_{xg}$. □

ამოცანა 4. ვთქვათ, $\mathrm{K}\subset E^3$ კუბია. განვიხილოთ მისი სიმეტრიის ჯგუფი G=Sym K={ $\varphi\epsilon\mathrm{Isom}E^3|\mathrm{K}\varphi=\mathrm{K}$}.ცხადია, რომ G სასრულია. უფრო მეტიც, კუბის სიმეტრია მთლიანად განისაზღვრება იმით, თუ როგორ ანაცვლებს ის მის წვეროებს. ამის გამო ჩვენ შეგვიძლია ჯგუფი G განვიხილოთ, როგორც K კუბის წვეროთა V სიმრავლის გარდაქმნათა S(V) ჯგუფი. იმის გამო, რომ კუბი წესიერი მრავალწახნაგაა, მისი ნებისმიერი წვერო შეიძლება გადავიყვანოთ ნებისმიერ სხვა წვეროში რომელიღაც გარდაქმნით G ჯგუფიდან. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჯგუფი G ტრანზიტულია V სიმრავლეზე. მაშასადამე, $|\mathrm{G}|=8|G_v|$, სადაც v კუბის

რომელიმე წვეროა. ანალოგიური სახით, თუ განვიხილავთ G_v ჯგუფს, როგორც v წვეროდან გამომავალ წიბოთა სიმრავლის გარდაქმნათა ჯგუფს, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $|G_v|=3|G_{v,r}|$, სადაც $G_{v,r}$ არის v წვეროდან გამომავალი რომელიმე r წიბოს სტაბილიზატორი G_v ჯგუფში.

ჯგუფი $G_{v,r}$ შედგება იგივური გარდაქმნისაგან და არეკვლისაგან იმ სიბრტყის მიმართ, რომელიც კუბის ცენტრზე და r წიბოზე გადის. ამგვარად,

$|\text{Sym K}|=8|G_v|=8\cdot3\cdot|G_{v,r}|=8\cdot3\cdot2=48$



შენიშვნა. იგივე შედეგი კიდევ ორი ხერხით მიიღება, თუ განვიხილავთ შესაბამისად ჯგუფ Sym K-ს როგორც წახნაგთა და წიბოთა სიმრავლეების გარდაქმნათა ჯგუფი.

ამოცანა 5. ვთქვათ, $G=\{g_\alpha|\alpha\epsilon S_4\}$ ოთხი უცნობის პოლინომთა $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ რგოლის გარდაქმნათა ჯგუფია, რომელიც შედგება x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობთა ყველა შესაძლო გადანაცვლებისაგან. ჯგუფი G იზომორფულია S_4-ის და, მაშასადამე, $|G|=4!=24$. განვიხილოთ,

$f= x_1x_2 + x_3x_4$ პოლინომი. უცნობთა ყველა გადანაცვლების შედეგად მიიღება სამი პოლინომი $x_1x_2 + x_3x_4$, $x_1x_3 + x_2x_4$, $x_1x_4 + x_2x_3$. ეს ნიშნავს, რომ $|fG|=3$. თანახმად (4) ფორმულისა, ვღებულობთ $|G_f|=\frac{|G|}{|fG|}=\frac{24}{3}=8$. შევნიშნოთ, რომ თუ G ჯგუფს S_4-თან გავაიგივებთ, მაშინ G_f იქნება სხვა არაფერი, თუ არა ქვეჯგუფი, რომელიც ამოცანა 1-ში აღნიშნულია Sym f-ით.

ერთი ტიპის სხვადასხვა ალგებრულ სტრუქტურებს შორის კავშირები მყარდება ჰომომორფიზმების საშუალებით. ჰომომორფიზმის ცნება იმით განსხვავდება იზომორფიზმის ცნებისაგან, რომ ის არ მოითხოვს ბიექციურობას. რამდენიმე შემთხვევაში ჩვენ უკვე შევხვდით ამ ცნებას. სახელდობრ, ვექტორულ სივრცეთა ჰომომორფიზმები სხვა არაფერია, თუ არა მათი წრფივი ასახვები.

განსაზღვრება 6. ვთქვათ, $(\mathrm{G}, *)$ და $(\mathrm{H}, \circ)$ ჯგუფებია. ასახვას φ: $\mathrm{G} \rightarrow \mathrm{H}$ ეწოდება **ჰომომორფული** ან (**ჰომომორფიზმი**) G-დან H-ში, თუ ნებისმიერი $a, b \in \mathrm{G}$ სრულდება $(a * b)\,\varphi = a\varphi \circ b\varphi$.

ჯგუფის თავის თავში ჰომომორფიზმს ეწოდება მისი **ენდომორფიზმი**, ხოლო თავის თავზე იზომორფიზმს- მისი **ავტომორფიზმი**.

მაგალითი 11. სიმეტრიული S_n ჯგუფის a ჩასმის $sgn a$ ნიშანი ვუწოდოთ მისი ჩანაწერის ზედა და ქვედა გადანაცვლებების ნიშნების ნამრავლს.

$$sgn\,a \begin{pmatrix} i_1 & i_{2\ldots} & i_n \\ j_1 & j_{2\ldots} & j_n \end{pmatrix} = sgn(i_1\ i_{2\ldots}\ i_n) \cdot sgn(j_1\ j_{2\ldots}\ j_n).$$

ეს ნამრავლი არაა დამოკიდებული a ჩასმის ჩაწერის წესზე, რადგან ჩაწერის ნებისმიერი წესიდან შეიძლება გადასვლა ნებისმიერ სხვა წესზე სვეტთა მიმდევრობითი ტრანსპოზიციებით, ხოლო ყოველი ასეთი ტრანსპოზიციით ერთდროულად იცვლება ზედა და ქვედა გადანაცვლებათა ნიშნები, ასე რომ ნარჩუნდება მათი ნამრავლი. ნიშნის ძირითადი თვისება არის ის, რომ ასახვა sgn: $S_n \rightarrow C_2 = \{\pm 1\}$, $a \mapsto sgn a$, ჰომომორფიზმია. მართლაც, a და b ჩასმების გადამრავლებისას შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ b ჩასმის ჩანაწერში ზედა სტრიქონი ემთხვეოდეს a ჩასმის ჩანაწერის ქვედა სტრიქონს:

$$a = \begin{pmatrix} i_1 & i_{2\ldots} & i_n \\ j_1 & j_{2\ldots} & j_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} j_1 & j_{2\ldots} & j_n \\ k_1 & k_{2\ldots} & k_n \end{pmatrix},$$ მაშინ $$ab = \begin{pmatrix} i_1 & i_{2\ldots} & i_n \\ k_1 & k_{2\ldots} & k_n \end{pmatrix},$$ ასე რომ

$$sgn\,ab = sgn(i_1, i_2, \ldots, i_n) \cdot sgn(k_1, k_2, \ldots, k_n) = [sgn(i_1, i_2, \ldots, i_n) \cdot sgn(j_1, j_2, \ldots, j_n)] \times [sgn(j_1, j_2, \ldots, j_n) \cdot sgn(k_1, k_2, \ldots, k_n)] = sgn\,a \cdot sgn\,b = sgn\,b \cdot sgn\,a.$$

ასეთი სახით განსაზღვრული sgn ჰომომორფიზმის ბირთვს ეწოდება **ნიშანცვლადი ჯგუფი** და A_n-ით აღინიშნება. გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი

ტერმინოლოგია: a ჩასმას, რომლისთვისაც $sgna$=1 (შესაბამისად$sgna$=-1), ეწოდება **ლუწი** (შესაბამისად **კენტი**). ამგვარად, A_n ლუწ ჩასმათა ქვეჯგუფია.

თეორემა 4. (ძირითადი ჰომომორფიზმების შესახებ) ვთქვათ, φ: G→ H ჯგუფთა ჰომომორფიზმია, მაშინ Imφ ≅ G/Ker φ. უფრო ზუსტად, ადგილი აქვს τ: Imφ → G/Ker φ იზომორფიზმს, რომელიც ყოველ k=$g\varphi\epsilon$ Imφ ელემენტს უთანადებს gKer φ მოსაზღვრე კლასს.

დამტკიცება. ზემოთ დამტკიცებული 5) თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ gKerφ მოსაზღვრე კლასის ყველა ელემენტი და მხოლოდ ისინი φ ჰომომორფიზმის შედეგად გადადიან k=$g\varphi\epsilon$ Imφ ელემენტში. ამით ნაჩვენებია, რომ ასახვა τ განსაზღვრულია კორექტულად და ბიექციურია. რჩება შესამოწმებლად, რომ τ ჰომომორფიზმია. ვთქვათ, g_1, $g_2\epsilon$G, $g_1\varphi$=k_1, $g_2\varphi$=k_2, მაშინ (g_1g_2) φ=k_1k_2 და $(k_1k_2)\tau$=(g_1g_2)Kerφ=$(g_1$Ker$\varphi)($ g_2Ker$\varphi)$= $k_1\tau k_2\tau$.□

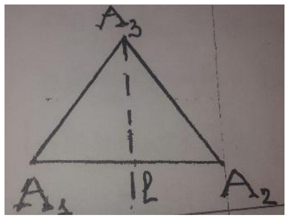
შედეგი. თუ ჯგუფი G სასრულია, მაშინ |G|=| Imφ||Kerφ|.

მაგალითი 12. ჰომომორფიზმისათვის sgn, რომელიც მაგალით 11-შია განხილული, გვაქვს $S_n/A_n \cong C_2$. კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ $|A_n|$=$\frac{1}{2}$ $n!$

მაგალითი 13. განსაზღვრების თანახმად (იხ(3)), ყოველი აფინური f გარდაქმნა პარალელური გადატანისა და φ წრფივი გარდაქმნის ნამრავლია. უკანასკნელს f გარდაქმნის **წრფივი ნაწილი** ან **დიფერენციალი** ეწოდება და df-ით აღინიშნება. ფორმულა, რომელიც თეორემა 1-ის დამტკიცების დროსაა მიღებული, გვიჩვენებს, რომ ასახვა d: GA(V) →GL(V), f ↦ df ჰომომორფიზმია. ცხადია, რომ Imd= GL(V), Ker$d$=Tran(V), ასე რომ GA(V)/ Tran(V) ≅ GL(V).

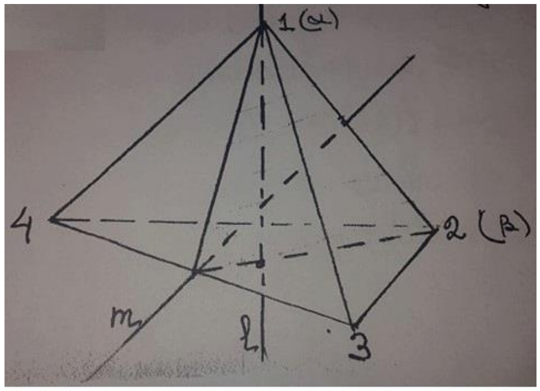
ამოცანა 6. ვთქვათ, $\Delta A_1A_2A_3$ წესიერი სამკუთხედია, თუ ყოველ $\varphi\epsilon$SymΔ მოძრაობას შევუსაბამებთ $a\epsilon S_3$ ჩასმას $A_i\varphi$=A_{ia} წესით, მივიღებთ f: SymΔ→ S_3 ჰომომორფიზმს. რადგან სიბრტყის ყოველი მოძრაობა, რომელიც ერთ წრფეზე არ მდებარე 3 წერტილს ადგილზე ტოვებს იგივურია, ამიტომ Ker f={id}. დავამტკიცოთ, რომ Im f=S_3. რადგან Im f ქვეჯგუფია S_3-ში და ჯგუფი S_3წარმოიქმნება ტრანსპოზიციებით საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ნებისმიერი

ტრანსპოზიცია ეკუთვნის Im f-ს, ე.ი. შეიძლება განხორციელდეს რომელიღაც $\varphi \epsilon \mathrm{Sym}\Delta$ მოძრაობით. მაგრამ, ეს მართლაც ასეა: მაგალითად, ტრანსპოზიცია (12) ხორციელდება ℓ წრფის მიმართ არეკვლით. ამგვარად, $\mathrm{Sym}\Delta \cong S_3$.



ამოცანა 7. ვთქვათ G წესიერი ტეტრაედრის სიმეტრიების ჯგუფია. დავამტკიცოთ, რომ $G\cong S_4$.

ვიპოვოთ G-ს რიგი. ვთქვათ v ტეტრაედრის წვეროა. გვაქვს $|G|=|G_v|\cdot|vG|$, მაგრამ $|vG|=4$, რადგან ცხადია, რომ ყოველთვის მოიძებნება ნებისმიერი წვეროს ნებისმიერ წვეროში გადამყვანი სიმეტრია. ამის გამო $|G|=4|G_v|$. ვთქვათ, w სხვა წვეროა და $G_{vw}=(G_v)_w$. მაშინ $|G_v|=|G_{vw}|\cdot|wG_v|$, მაგრამ $|wG_v|=3$, რადგან იმ ღერძის მიმართ ბრუნვას, რომელიც გადის v-ზე და მოპირდაპირე წახნაგის ცენტრზე, w შეუძლია გადაიყვანოს ნესბისმიერ წვეროში, გარდა v-სი. ბოლოს, $|G_{vw}|=2$, რადგან ერთაადერთი არატრივიალური სიმეტრია, რომელიც v-ს და w-ს ადგილზე ტოვებს-სიმეტრიაა იმ სიბრტყის მიმართ, რომელიც გადის v-ზე, w-ზე და აერთებს მოპირდაპირე წიბოებს. ამგვარად, $|G|=4\cdot3\cdot2=24$. მეორე მხრივ, არსებობს G-ს იზომორფული ჩადგმა S_4-ში ($g \mapsto a$ წესით v_{ia}) და, ამგვარად, $G\leq S_4$, მაგრამ $|G|=|S_4|$ და მაშასადამე, $G\cong S_4$.



თუ დავკმაყოფილდებით წესიერი ტეტრაედრის მხოლოდ ბრუნვებით, მივიღებთ ჯგუფს R$\cong A_4$ (ამ შემთხვევაში $\mathrm{G}_{vw} = id$). განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით ეს ჯგუფი. R შედგება იგივური id გარდაქმნისაგან. სამი მობრუნებისაგან π კუთხით იმ წრფეების მიმართ, რომლებიც აერთებენ მოპირდაპირე წიბოებს (A_4-ში (12)(34) ტიპის ციკლები) და რვა მობრუნებისაგან $\frac{2}{3}\pi$ და $\frac{4}{3}\pi$ კუთხეებით იმ წრფეების მიმართ, რომლებიც აერთებენ წვეროს მოპირდაპირე წახნაგის ცენტრთან (A_4-ში (123) ტიპის ციკლები).

ამოცანა 8. პოლინომები

$\mathrm{f}_1 = x_1x_2 + x_3x_4$, $\mathrm{f}_2 = x_1x_3 + x_2x_4$, $\mathrm{f}_3 = x_1x_4 + x_2x_3$ (5)

უცნობთა ნებისმიერ $a \epsilon S_4$ ჩასმას x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობთა $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3$ პოლინომები გადაჰყავს ერთიმეორეში. ვღებულობთ ჰომომორფიზმს $\varphi\colon S_4 \to S_3$, $a \mapsto (\mathrm{f}_{i_1}, \mathrm{f}_{i_2}, \mathrm{f}_{i_3})$, $(i_1, i_2, i_3)\, \epsilon S_3$.

დავამტკიცოთ, რომ Im f$=S_3$. ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ (5) პოლინომთა ნებისმიერი ტრანსპოზიცია შეიძლება განხორციელდეს x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობების რომელიღაც გადანაცვლებით. სინამდვილეში ეს მართლაც ასეა: მაგალითად, პირველი ორი პოლინომის ტრასნპოზიცია (5)-დან შეიძლება განხორციელდეს x_2 და x_3 უცნობთა ტრანსპოზიციით. შემდეგ, Kerφ კლაინის $\mathrm{K}_4=\{e$, (12)(34), (13)(24),(14)(23)$\}$ ოთხჯერი ჯგუფია ჰომომმორფიზმების ძირითადი თეორემის თანახმად $\mathrm{K}_4 \lhd S_4$ და $S_4/\mathrm{K}_4 \cong S_3$.

ცხადია, რომ F$\to$ G და G$\to$H ჰომომორფიზმთა კომპოზიცია F$\to$ H ჰომომორფიზმია.

მაგალითი 14. განვიხილოთ det: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ და sgn: $\mathbb{R}^* \to C_2$={±1} ჰომომორფიზმთა კომპოზიცია, სადაც sgn აღნიშნავს ნამდვილი რიცხვის ნიშანს. შედეგად მივიღებთ φ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to C_2$ ჰომომორფიზმს. როცა n=2 მას აქვს შემდეგი გეომეტრიული აზრი: თუ $A\varphi$=1 ($A\varphi$=-1), მაშინ A მატრიცით განსაზღვრული E^2 სივრცის წრფივი გარდაქმნა ინარჩუნებს (იცვლის) ორიენტაციას იმ აზრით, რომ მისი ნებისმიერი დადებითად ორიენტირებული ბაზისი გადაჰყავს დადებითად (უარყოფითად) ორიენტირებულ ბაზისში. ანალოგიური ინტერპრეტაციაა შესაძლებელი როცა n=3.

მაგალითი 15. ჰომომორფიზმთა d: $\mathrm{G}A(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$= $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ და φ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to C_2$ კომპოზიცია (6)

$\mathrm{G}A(\mathbb{R}^n) \to C_2$ ჰომომორფიზმია. როცა n=2 და n=3 ეს იძლევა საშუალებას განვავრცოთ ევკლიდური სიბრტყის და ევკლიდური სივრცის აფინურ გარდაქმნებზე ორიენტაციის შენარჩუნების და ცვლილების ცნებები. სახელდობრ, აფინური გარდაქმნა ინარჩუნებს(იცვლის) ორიენტაციას, თუ მისი დიფერენციალი ინარჩუნებს(იცვლის) ორიენტაციას. კერძოდ, შეიძლება ვილაპარაკოთ მოძრაობებზე, რომლებიც ინარჩუნებენ ან იცვლიან ორიენტაციას.

მაგალითი 16. ვთქვათ, G<IsomE^n (n=2 ან n=3) რაიმე ორიენტაციის შემცვლელ მოძრაობათა მქონე ქვეჯგუფია. თუ განვიხილავთ (6) ჰომომორფიზმის შეზღუდვას G-ზე, მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ G-ს ორიენტაციის შემნახველ მოძრაობათა ქვესიმრავლე ქვეჯგუფია ინდექსით 2. აღვნიშნოთ G_+-ით ეს ქვეჯგუფი.

ამოცანა 9. კერძოდ, Sym_+K<Sym K ქვეჯგუფს ვუწოდოთ K კუბის ბრუნვათა ჯგუფი, რადან |Sym K|=48 (იხ. ამოცანა 2), ხოლო Sym_+K ქვეჯგუფია ინდექსით 2, ამიტომ |Sym_+K|=24. დავამტკიცოთ, რომ Sym_+K≅ S_4.

ამისათვის დავნომროთ რაიმე სახით K კუბის 4 დიაგონალი და ყოველ $\varphi \epsilon Sym_+$K მოძრაობას შევუსაბამოთ ამ დიაგონალთა სიმრავლით განხორციელებული ჩასმა. მივიღებთ f: Sym_+K→ S_4 ჰომომორფიზმს.

დავამტკიცოთ, რომ $\mathrm{Im}\, f = S_4$. აქედან მივიღებთ, რომ f იზომორფიზმია, რადგან $|Sym_{+}\mathrm{K}| = |S_4|$. ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ $\mathrm{Im}\, f$-ს ეკუთვნის ნებისმიერი ტრანსპოზიცია, მაგრამ ეს მართლაც ასეა: მაგალითად, ტრანსპოზიცია (12) ხორციელდება ℓ წრფის ირგვლივ π-ზე მობრუნებით.