ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მედეა იორდანიშვილი

დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები: მათემატიკური მოდელები, კოშის ამოცანის კორექტულობა

მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში
მე-7 საფაკულტეტო კონფერენციაზე წარსადგენად
დოქტორანტის სემინარი 1

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე

ფიზიკა–მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

თბილისი 2019

ანოტაცია

ნაშრომში, განხილულია სამი ტიპის დიფერენციალური მოდელი დაგვიანების ფაქტორის გათვალისწინებით. არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებისთვის მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში და წყვეტილი საწყისი პირობით, მოყვანილია კოშის ამოცანის კორექტულობის თეორემები საწყისი მონაცემებისა და განტოლების მარჯვენა მხარის შეშფოთებების მიმართ. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, საწყისი ფუნქციისა და საწყისი ვექტორის ერთობლიობა, იგი მცირეა სტანდარტული ნორმით. განტოლების მარჯვენა მხარის შეშფოთება მცირეა ინტეგრალური აზრით. ანალოგიური თეორემები მოყვანილია სამართი დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებისთვის.

Summary

In the work, the three type of differential models are considered taking into account the factor of delay. For nonlinear differential equation with the constant delay in the phase coordinates and with the discontinuous initial condition well-posedness theorems of the Cauchy problem are provided with respect to perturbations of the initial data and the right-hand side of equation. Under initial data we imply the collection of the initial moment, initial function and vector and it is small in the standard norm. The right-hand of equation is small in the integral sense. Analogous theorems are given for the controlled delay differential equation.

სარჩევი

შესავალი

ცნობილია რომ, რეალური ეკონომიკური, ბიოლოგიური, ფიზიკური და მრავალი სხვა პროცესი შეიცავს ინფორმაციას წარსულში მათი ყოფაქცევის შესახებ. ასეთი პროცესები, როგორც წესი, აღიწერებიან დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებებით. დოქტორანტის სემინარისთვის განკუთვნილ რეფერატულ ნაშრომში მოყვანილია: მათემატიკური მოდელები, რომლებშიც გათვალისწინებულია დაგვიანების ფაქტორი; კოშის ამოცანის ამონახსნის საწყის მონაცემებზე უწყვეტად დამოკიდებულების (კორექტულობის) თეორემები არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებისთვის ერთი მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში.

ნაშრომი შედგება ორი პარაგრაფისგან. პირველ პარაგრაფში: განხილულია ეკონომიკური ზრდის, იმუნური პასუხისა და სამართი საფრენი აპარატის მოდელები; მაგალითებზე შედარებულია ჩვეულებრივი და დაგვიანებულ არგუმენტებიანი განტოლებები; გადმოცემულია ბიჯის მეთოდის არსი და ამ მეთოდით აგებულია კონკრეტული განტოლების ამონახსნი; მე-2 პარაგრაფში ფორმულირებულია თეორემები კოშის ამოცანის ამონახსნის კორექტულობის შესახებ. თეორემა 2.1 გვიჩვენებს , რომ ამონახსნი უწყვეტია საწყისი მონაცემების (საწყისი მომენტის, საწყისი ფუნქციის, საწყისი ვექტორის) და განტოლების მარჯვენა მხარის შეშფოთებების მიმართ. ეს თეორემა წარმოადგენს რ. გამყრელიძისა და გ. ხარატშვილის თეორემის ანალოგს [1]. თეორემა 2.2, რომელიც ჩამოყალიბებულია გარკვეული კლასის ვარიაციათა სიმრავლესთან მიმართებაში, არის თეორემა 2.1-ის შედეგი. ამონახსის უწყვეტობის მსგავსი თეორემები მოყვანილია სამართი დაგვიანებულ არგუმენტიანი განტოლებისთვის. კორექტულობის თეორემები გამოიყენება ოპტიმალური ამოცანების გამოკვლევისას, ამონახსნის ვარიაციის ფორმულების დამტკიცებისას [1,2].

წარმოდგენილ რეფერატულ ნაშრომში გამოყენებულია [2,3]-ში გადმოცემული მასალა.

1. მათემატიკური მოდელები

ცნობილია რომ, რეალური ეკონომიკური, ბიოლოგიური, ფიზიკური და მრავალი სხვადასხვა პროცესი შეიცავს ინფორმაციას წარსულში მათი ყოფაქცევის შესახებ. ე.ი. ასეთი პროცესები შეიცავენ დაგვიანების ფაქტორს და აღიწერებიან დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებებით. საილუსტრაციოდ, ქვემოთ მოყვანილია რამდენიმე უმარტივესი თეორიულ მოდელი.

1.1 ეკონომიკური ზრდის მოდელი

ვთქვათ $N(t)$ არის t მომენტში წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა გამოსახული ფულად ერთეულებში. ეკონომიკური ზრდის ძირითად პრინციპს აქვს შემდეგი სახე

$$N(t) = C(t) + I_{inv}(t), \qquad (1.1)$$

სადაც $C(t)$ არის ე. წ. გამოყენების ფუნქცია (თანხა ხელფასებისთვის +თანხა სოციალური პროგრამებისთვის და ა. შ.)

$I_{inv}(t)$ არის შიგა ინვესტიცია (ფული განახლებული ტექნოლოგიების შეძენისთვის+ფული ახალი ტექნიკის შეძენისთვის და ა. შ.).

ჩვენ განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როცა $C(t)$ და $I_{inv}(t)$ ფუნქციებს აქვთ სახე

$$C(t) = \alpha_0 N(t), \quad \alpha_0 \in (0,1) \qquad (1.2)$$

$$I_{inv}(t) = \alpha_1 N(t-\tau) + \alpha_2 \dot{N}(t), \quad \tau > 0, \ \dot{N}(t) = \frac{d}{dt} N(t). \qquad (1.3)$$

(1.3) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ინვესტიცია t მომენტში დამოკიდებულია $t-\tau$ მომენტში თანხის რაოდენობაზე (წარსულში, τ –ს ეწოდება დაგვიანება) და t მომენტში სიჩქარეზე (პროდუქციის ნაკადი).

(1.1)-(1.3) ფორმულებიდან მიიღება შემდეგი დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{N}(t) = \frac{1-\alpha_0}{\alpha_2} N(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} N(t-\tau).$$

თუ ბიზნესმენი აწარმოებს ფულს, ისე რომ

$$\dot{N}(t) > 0$$

მაშინ მას აქვს ეკონომიკური ზრდა ე.ი. ფულადი მოგება.

1.2. იმუნური პასუხის მარჩუკის მოდელი

ორგანიზმზე ვირუსების თავდასხმისა და მისი იმუნური პასუხის შესახებ გამარტივებულ მოდელს წარმოადგენს შემდეგი დაგვიანებულ არგუმენტიანი განტოლება

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = p_1 x^1(t) - p_2 x^1(t) x^3(t), \\ \dot{x}^2(t) = p_3 x^1(t-\tau) x^3(t-\tau) - p_4 (x^2(t) - x^{2^*}), \\ \dot{x}^3(t) = p_5 x^2(t) - p_6 x^3(t) - p_7 x^1(t) x^3(t), \end{cases} \qquad (1.4)$$

სადაც $x^1(t)$ არის ვირუსების კონცენტრაცია t მომენტში;

$x^2(t)$ არის პლაზმის უჯრედების კონცენტრაცია, რომლებიც წარმოქმნიან ანტისხეულებს. პლაზმის უჯრედები გარკვეული დროის შემდეგ იძლევიან იმუნურ პასუხს, რომელიც გამოისახება შემდეგი თანაფარდობით

$$p_3 x^1(t-\tau) x^3(t-\tau),$$

$\tau > 0$ არის იმუნური პასუხის დაგვიანება;

$x^3(t)$ არის ანტისხეულების კონცენტრაცია, რომლებიც კლავენ ვირუსებს.

(1.4) სისტემის პირველი განტოლება

$$\dot{x}^1(t) = p_1 x^1(t) - p_2 x^1(t) x^3(t)$$

აღწერს $x^1(t)$ -ს ცვლილებას და აქვს იგივე ფორმა, როგორც განტოლებას მტაცებლ-მსხვერპლის ლოტკა-ვოლტერას მოდელში. აქ პირველი წევრი $p_1 x^1(t)$ ხელს უწყობს ვირუსების გამრავლებას, ხოლო მეორე წევრი

$$p_2 x^1(t) x^3(t)$$

გამოსახავს ბრძოლას ვირუსებსა და ანტისხეულებს შორის და ხელს უშლის ვირუსების გამრავლებას.

x^{2^*} არის პლაზმის უჯრედების ფიზიოლოგიური დონე. პლაზმის უჯრედების კონცენტრაცია ყოველთვის არსებობს ორგანიზმში. ვირუსების არ არსებობის შემთხვევაში პლაზმის უჯრედები რჩებიან ერთ დონეზე.

$p_1, p_2, \cdots, p_7$ დადებითი მუდმივებია.

შემდეგი სამართი მოდელი

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = p_1 x^1(t) - p_2 x^1(t) x^3(t), \\ \dot{x}^2(t) = p_3 x^1(t-\tau) x^3(t-\tau) - p_4 (x^2(t) - x^{2^*}) + u^1(t), \\ \dot{x}^3(t) = p_5 x^2(t) - p_6 x^3(t) - p_7 x^1(t) x^3(t) + u^2(t), \end{cases}$$

არის იმუნური პასუხის მოდელის უფრო მაღალი დონე.

აქ $u^1(t) \in [0, \hat{v}^1]$ მართვა უზრუნველყოფს პლაზმის უჯრედების გაძლიერებას, ხოლო $u^2(t) \in [0, \hat{v}^2]$ მართვა არის ანტისხეულების გამაძლიერებელი.

1.3. საფრენი აპარატის მოდელი

ვთქვათ, საფრენი აპარატი ფრენის პროცესში იმართება $u(t)$ რადიო სიგნალით. რადიო სიგნალი, როგორც წესი, შორ მანძილზე გადაცემისას სუსტდება, აუცილებელია მისი გარდაქმნა /გაძლიერება. ამისათვის საჭიროა გარკვეული $\tau > 0$ დრო. τ -ს ეწოდება ე. წ. დაგვიანება და მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია გამაძლიერებელ მოწყობილობაზე, რომელიც მოთავსებულია საფრენ ობიექტზე.

გამარტივებული კლასიკური მათემატიკური მოდელი, რომელიც აღწერს ამ სიტუაციას არის შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} L(p)x = y(t-\tau), \\ M(p)y = u(t). \end{cases}$$

აქ

$$L(p) = p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_{m-1} p + a_m p^0$$

$$M(p) = p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_{k-1} p + a_k p^0$$

მოცემული მუდმივ კოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური ოპერატორებია. $p = \dfrac{d}{dt}$ არის დიფერენცირების ოპერატორი, $px = \dot{x}, \quad p^0 x = x, \quad p^i x = x^{(i)}$.

პირველი განტოლება აღწერს საფრენი აპარატის მოძრაობას, ხოლო $y(t)$ არის გაძლიერებული სიგნალი, რომელსაც გამოიმუშავებს მეორე სისტემა.

1.4. ჩვეულებრივი და დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებების შედარება

ქვემოთ მოყვანილი მაგალითი გვიჩვენებს განსხვავებას ჩვეულებრივ და დაგვიანებულ არგუმენტიან განტოლებებს შორის.

განვიხილოთ წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = -x(t), \ \ t \in [0, \infty). \qquad (1.5)$$

(1.5) განტოლების ამონახსნი არის

$$x(t) = ce^{-t}, \ c \in \mathbb{R}^1.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{x \to +\infty} x(t) = 0$$

ე.ი. $x(t)$ ამონახსნს არ გააჩნია ნულები.

ახლა განვიხილოთ (1.5) -ის მსგავსი განტოლება, მაგრამ უკვე დაგვიანებით

$$\dot{y}(t) = -y(t - \frac{\pi}{2}), \ \ t \in [0, \infty). \qquad (1.6)$$

$y(t) = c\cos t$ ფუნქცია არის (1.6) განტოლების ამონახსენი, რომელსაც გააჩნია ნულები.

ასე რომ, დაგვიანების ფაქტორის არსებობა არსებითად ცვლის ამონახსნის სტრუქტურასა და თვისებებს.

შემდეგ, კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t), \ \ t \in [0, \infty). \\ x(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$x(t) = e^{\frac{\pi}{2} - t}.$

მეორე მხრივ, ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -y(t - \frac{\pi}{2}), \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე $y(t) = c\cos t,\ c \in \mathbb{R}^1$, ე.ი. ერთადერთობა დარღვეულია.

როგორც ვხედავთ, ერთი საწყისი პირობა $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ არ იძლევა ამონახსნის ერთადერთობის გარანტიას.

ამონახსნის ერთადერთობისთვის დაგვიანებულ არგუმენტიან განტოლებებში საჭიროა სხვა პირობაც; სახელდობრ, საჭიროა ამონახსნის პრეისტორიის (წინაისტორიის) ცოდნა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ამონახსნის ერთადერთობისთვის საჭიროა ვიცოდეთ საწყისი ფუნქცია საწყის ინტერვალზე და საწყისი მნიშვნელობა.

განვიხილოთ წრფივი დაგვიანებულ არგუმენტიანი განტოლება

$$\dot{y}(t) = -y(t - \frac{\pi}{2}), \quad t \in [0, \pi] \qquad (1.7)$$

შემდეგი საწყისი პირობით

$$y(t) = \sin t, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, 0), \quad y(0) = y_0 = 1. \qquad (1.8)$$

$[-\frac{\pi}{2}, 0]$ ინტერვალს ეწოდება საწყისი ინტერვალი

$\varphi(t) = \sin t$ ფუნქციას (1.8)- ში ეწოდება საწყისი ფუნქცია (პრეისტორია),

y_0 -ს (1.8)- ში ეწოდება საწყისი მნიშვნელობა.

(1.8) საწყის პირობას ეწოდება წყვეტილი საწყისი პირობა, ვინაიდან

$$\varphi(0) \neq y(0) \ \ (\varphi(0) = 0,\ y(0) = y_0 = 1).$$

(1.7)-(1.8) ამოცანას ეწოდება კოშის ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით.

ახლა ავაგოთ (1.7)-(1.8) ამოცანის ამონახსნი ბიჯის მეთოდით.

ქვემოთ აღწერილია ბიჯის მეთოდის არსი. თავდაპირველად $[0, \pi]$ ინტერვალი დავყოთ ქვეინტერვალებად, რომელთა სიგრძე დაგვიანების მნიშვნელობის ტოლია (ჩვენს შემთხვევაში ის $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლია). ამიტომ გვექნება ორი ქვეინტერვალი

$$I_1 = [0, \frac{\pi}{2}],\ I_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

პირველი ბიჯი:

$I_1 = [0, \frac{\pi}{2}]$ ინტერვალზე გვექნება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება , იხ. (1.7)

(რადგან თუ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, მაშინ $t - \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$)

$$\dot{y}(t) = -\sin(t - \frac{\pi}{2}) = \cos t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad (1.9)$$

საწყისი პირობით

$$y(0) = 1 \qquad (1.10)$$

(1.9)-(1.10) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$y_1(t) = 1 + \sin t, \ t \in [0, \frac{\pi}{2}] .$$

მეორე ბიჯი:

$I_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ინტერვალზე აგრეთვე გვაქვს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{y}(t) = -1 - \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -1 + \cos t, \ t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \qquad (1.11)$$

შემდეგი საწყისი პირობით

$$y(\frac{\pi}{2}) = y_1(\frac{\pi}{2}) = 2 \qquad (1.12)$$

(1.11)-(1.12) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$y_2(t) = -t + \sin(t) + 1 + \frac{\pi}{2}, \ t \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

ფუნქციას

$$y(t) = \begin{cases} \sin t, \ t \in [-\frac{\pi}{2}, 0), \\ y_1(t), \ t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ y_2(t), \ t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

ეწოდება (1.7)-(1.8) ამოცანის ამონახსნი.
ცხადია, რომ

$$\dot{y}(\frac{\pi}{2}-) = \dot{y}_1(\frac{\pi}{2}-) = 0,$$

$$\dot{y}(\frac{\pi}{2}+) = \dot{y}_1(\frac{\pi}{2}+) = -1.$$

ამგვარად,

$$\dot{y}(\frac{\pi}{2}-) \neq \dot{y}(\frac{\pi}{2}+),$$

ე. ი. $y(t)$ ამონახსნი $[0, \pi]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს (1.7) განტოლებას ყველგან გარდა $\frac{\pi}{2}$ წერტილისა.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -y(t-\frac{\pi}{2}), \quad t \in [0, \frac{3\pi}{2}], \\ y(t) = \varphi(t) = \sin t, \ t \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases} \qquad (1.13)$$

ამოცანას, ეწოდება კოშის ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით, რადგან

$$\varphi(0) = y(0).$$

ანალოგიური გზით შეიძლება აგებული იქნეს (1.13) ამოცანის ამონახსნი.

1.5. არაწრფივი დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებები

განვიხილოთ $\mathbb{R}^n$ სივრცეში შემდეგი დაგვიანებულ არგუმენტიანი განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \ t \in [t_0, t_1]$$

და შემდეგი სამართი დაგვიანებულ არგუმენტიანი განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), \ t \in [t_0, t_1].$$

ცხადია, რომ ზემოთ განხილული მოდელები არიან ამ განტოლებების კონკრეტული შემთხვევები.

კოშის ამოცანას წყვეტილი საწყისი პირობით აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \ t \in [t_0, t_1] \\ x(t) = \varphi(t), \ t \in [t_0-\tau, t_0), \ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

სადაც $\varphi(t), \ t \in [t_0-\tau, t_0)$ და x_0 შესაბამისად მოცემული საწყისი ფუნქცია და ვექტორია.

საწყის პირობას

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in [t_0-\tau, t_0), \ x(t_0) = x_0$$

ეწოდება წყვეტილი, რადგან საზოგადოდ $x(t_0) \neq \varphi(t_0)$.

ზოგად შემთხვევაში ბიჯის მეთოდი შეიძლება აღვწეროთ ასე: ძირითადი $[t_0, t_1]$ ინტერვალი დავყოთ $I_i, \ i = \overline{1, m}$ ქვეინტერვალებად, რომელთა სიგრძეა

$$|I_i| = \tau, \ i = \overline{1, m-1}, \ |I_m| \leq \tau.$$

აქ განხილულია შემთხვევა, როცა $t_1 - t_0 \neq m\tau$. შემდეგ , ამ ქვეინტერვალებზე განვიხილავთ შესაბამის კოშის ამოცანებს.

კოშის ამოცანას უწყვეტი საწყისი პირობით აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \ t \in [t_0, t_1] \\ x(t) = \varphi(t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases}$$

საწყის პირობას

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

ეწოდება უწყვეტი, რადგან ყოველთვის $x(t_0) = \varphi(t_0)$.

უახლესი განზოგადოება ზემოთ განხილული განტოლებებისა არის:

1) განტოლება მუდმივი დაგვიანებებით

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_s)), \ \tau_i > 0, \ i = 1, \ldots, s;$$

2) განტოლება ცვლადი დაგვიანებით

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))), \ \tau(t) > 0;$$

3) ნეიტრალური დაგვიანებულ არგუმენტიანი განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)), \ \tau > 0.$$

2. კოშის ამოცანის კორექტულობა

ტერმინი კარგად დასმული ამოცანა (კორექტულობა) პირველად შემოღებული იყო ფრანგი მათემატიკოსის ჟაკ ადამარის (Jacques Hadamard) მიერ . მას მიაჩნდა, რომ რეალური პროცესის აღმწერ დიფერენციალურ განტოლებას უნდა გააჩნდეს შემდეგი თვისებები:

1) უნდა არსებობდეს ამონახსნი ;
2) ამონახსნი უნდა იყოს ერთადერთი;
3) ამონახსნი უნდა იყოს უწყვეტად დამოკიდებული საწყის მონაცემებზე.

წარმოდგენილ სემინარში განხილულია კოშის ამოცანა დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებისთვის, სადაც არსებობა და ერთადერთობა ყოველთვის გარანტირებულია. ასე რომ, ადამარის მოთხოვნებიდან პირველი და მეორე პირობა შესრულებულია.

2.1. აღნიშვნები და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

$I = [a, b]$-სასრული ინტერვალია; $\mathbb{R}^n$ არის

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^2$$

წერტილების $n-$ განზომილებიანი ვექტორული სივრცე, $O \subset \mathbb{R}^n$ - ღია სიმრავლეა;
E_f არის

$$f(t,x,x_1) = \begin{pmatrix} f^1(t,x,x_1) \\ \vdots \\ f^n(t,x,x_1) \end{pmatrix} : I \times O^2 \to \mathbb{R}^n,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix},$$

ფუნქციების სივრცე, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) ყოველი ფიქსირებული $(x,x_1) \in O^2$ -თვის $f(t,x,x_1)$ ფუნქცია ზომადია I –ზე;
2) ყოველი $f \in E_f$ -თვის და $K \subset O$ კომპაქტური სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი

$$m_{f,K}(t),\ L_{f,K}(t) \in L_1(I,\ R_+),\ R_+ = [0,\infty),$$

ფუნქციები, რომ თითქმის ყოველი $t \in I$ -თვის გვაქვს

$$\left|f(t,x,x_1)\right| \le m_{f,K}(t),\ \forall (x,x_1) \in K^2$$

და

$$\left|f(t,x,x_1) - f(t,y,y_1)\right| \le L_{f,K}(t)\left[|x-y| + |x_1 - y_1|\right],$$
$$\forall (x,x_1) \in K^2,\ \forall (y,y_1) \in K^2.$$

$\tau > 0$ - დაგვიანების პარამეტრია;
$I_1 = [\hat{\tau}, b]$, სადაც $\hat{\tau} = a - \tau;$

$C(I_1,\mathbb{R}^n)$ -ით აღვნიშნოთ უწყვეტ $\varphi : I_1 \to \mathbb{R}^n$ ფუნქციების სივრცე, აღჭურვილი ნორმით

$$\|\varphi\|_{I_1} = \sup\{|\varphi(t)| : t \in I_1\}.,$$

$\Phi = \{\varphi \in C(I_1,\mathbb{R}^n) : \varphi(t) \in O,\ \ t \in I_1\}$ -ით აღვნიშნოთ $\varphi(t)$ საწყის ფუნქციათა სიმრავლე.
ყოველ

$$\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in \Lambda = [a,b) \times O \times \Phi \times E_f$$

ელემენტს შევუსაბამო დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \qquad (2.1)$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [\hat{\tau}, t_0),\ \ x(t_0) = x_0. \qquad (2.2)$$

განსაზღვრება 2.1. ვთქვათ $\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in \Lambda$. $x(t) = x(t;\mu) \in O,\ t \in [\hat{\tau}, t_1),\ \ t_1 \in (t_0, b]$ ფუნქციას ეწოდება (2.1) განტოლების ამონახსნი (2.2) საწყისი პირობით ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_1)$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (2.2)-ს და აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0, t_1]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას თითქმის ყველგან.

ცნობილია, რომ თუ $t_1 - t_0$ არის საკმარისად მცირე, მაშინ არსებობს μ-ს შესაბამისი ამონახსნი.

E_f სივრცეში შემოვიღოთ შემდეგი სიმრავლე:

$$W(K;\alpha) = \Big\{ p(t, x, x_1) \in E_f : \exists m_{p,K}(t), L_{p,K}(t) \in L_1(I, R_+),$$
$$\int_I \Big[m_{p,K}(t) + L_{p,K}(t) \Big] dt \le \alpha \Big\},$$

სადაც $K \subset O$ კომპაქტური სიმრავლეა, $\alpha > 0$ ფიქსირებული რიცხვია $p(t, x, x_1)$-ზე დამოუკიდებული .

$p(t, x, x_1) \in W(K;\alpha)$ ფუნქციას ეწოდება (1.1) განტოლების მარჯვენა მხარის $f(t, x, x_1)$-ს შეშფოთება. თუ

$$p(t, x, x_1) \in W(K;\alpha)$$

მაშინ ვიტყვით , რომ $p(t, x, x_1)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ინტეგრალური აზრით.

შემდეგ, ქვესიმრავლე

$$V_{K,\delta} = \left\{ p(t, x, x_1) \in E_f : \left| \int_{t'}^{t''} p(t, x, x_1) dt \right| < \delta,\ \ \forall t', t'' \in I, \forall x, x_1 \in K \right\}.$$

სადაც $\delta > 0$ მოცემული რიცხვია.

მაგალითი 2.1. ვთქვათ

$$I = [0,1],\ \ K = [0,1],\ \ \alpha = 3;\ \ p_k(t, x, x_1) = v_k(t)(x + x_1),\ \ k \in \{2, 3, \cdots\},$$

სადაც $v_k(t)$ ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად :

ყოველი $k \in \{2, 3, \cdots\}$-თვის $[0,1]$ ინტერვალ დავყოთ $1/k$ სიგრძის ქვეინტერვალებად $l_i,\ i = 1, \ldots k$ ე. ი.

$$mes\, l_1 = \cdots = mes\, l_k = \frac{1}{k},$$

ფუნქცია $v_k(t), t \in I$ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად
$v_k(t) = 1,\ t \in l_1,\ v_k(t) = -1,\ t \in l_2$ და ა. შ. . ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left|p_k(t,x,x_1)\right| \le \left|v_k(t)\right|(\left|x\right| + \left|x_1\right|) \le 2,\ \forall (t,x,x_1) \in [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

ე.ი.

$$m_{p_k,K}(t) = 2$$

შემდეგ,

$$\left|p_k(t,x,x_1) - p_k(t,y,y_1)\right| \le \left|v_k(t)\right|(\left|x-y\right| + \left|x_1-y_1\right|) \le \left|x-y\right| + \left|x_1-y_1\right|)$$
$$\forall (t,x,x_1) \in [0,1]\times[0,1]\times[0,1], \qquad \forall (y,y_1) \in [0,1]\times[0,1]$$

ე.ი.

$$L_{p_k,K}(t) = 1.$$

ამგვარად,

$$\int_0^1 [m_{p,K}(t), + L_{p,K}(t)]dt = 3$$

მაშასადამე ,

$$p_k(t,x,x_1) \in W(K;3).$$

ვთქვათ $\delta > 0$ მოცემული მცირე რიცხვია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ რაგინდ დიდი $k \in \{2,3,\cdots\}$ -თვის

$$p_k(t,x,x_1) \in V_{K,\delta}. \qquad (2.3)$$

მართლაც, $\forall t', t'' \in [0,1];\ \ \forall x, x_1 \in [0,1]$ -თვის გვაქვს

$$\left|\int_{t'}^{t''} [v_k(t)(x + x_1)]dt\right| \le (\left|x\right| + \left|x_1\right|)\left|\int_{t'}^{t''} v_k(t)dt\right| \le 2\left|\int_{t'}^{t''} v_k(t)dt\right|.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{t'}^{t''} v_k(t)dt\right| = 0 \text{ თანაბრად } t', t'' \in [0,1].\text{-თვის}$$

ამგვარად $\delta > 0$ -თვის არსებობს ისეთი $k = k(\delta) \in \{2,3,\cdots\}$, რომ

$$2\left|\int_{t'}^{t''} v_k(t)dt\right| < \delta.$$

მაშასადამე (2.3) ჭეშმარიტია.
ვთქვათ $\mu_0 = (t_{00}, \tau_{10}, x_{00}, \varphi_0, f_0) \in \Lambda.$ ფიქსირებული ელემენტია,

$$B(t_{00};\delta) = \{t_0 \in I : \left|t_0 - t_{00}\right| < \delta\},\ B(x_{00};\delta) = \{x_0 \in O : \left|x_0 - x_{00}\right| < \delta\},$$
$$B(\varphi_0;\delta) = \{\varphi_0 \in \Phi : \left\|\varphi - \varphi_0\right\|_{I_1} < \delta\},$$

თეორემა 2.1. *ვთქვათ* $x_0(t) = x(t;\mu_0)$ *არის* $\mu_0 = (t_{00}, x_{00}, \varphi_0, f_0) \in \Lambda$ *ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული* $[\hat{\tau}, t_{10}]$*-ზე და ვთქვათ* $K_1 \subset O$ *კომპაქტი მოიცავს* $\varphi_0(I_1) \cup x_0([t_{00}, t_{10}])$ *სიმრავლის რაიმე მიდამოს, სადაც* $\varphi_0(I_1) = \{\varphi_0(t) : t \in I_1\}$. *მაშინ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

2.1. არსებობს $\delta_0 > 0$ *ისეთი, რომ ყოველ*

$$\mu = (t_0, x_0, \varphi, f_0 + p) \in V(\mu_0; K_1, \delta_0, \alpha) = B(t_{00}; \delta_0) \times B(x_{00}; \delta_0) \times B(\varphi_0; \delta_0) \times [f_0 + (W(K_1; \alpha) \cap V_{K_1, \delta_0})],$$

ელემენტს, სადაც

$$f_0 + (W(K_1; \alpha) \cap V_{K_1, \delta_0}) = \left\{ f_0 + p : p \in (W(K_1; \alpha) \cap V_{K_1, \delta_0}) \right\},$$

შეესაბამება $x(t;\mu)$ *ამონახსნი განსაზღვრული* $[\hat{\tau}, t_{10}]$ *ინტერვალზე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას* $x(t;\mu) \in K_1$;

2.2. ყოველი $\varepsilon > 0$*-თვის არსებობს ისეთი* $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$ *რიცხვი, რომ ყოველი* $\mu \in V(\mu_0; K_1, \delta_1, \alpha)$*-თვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას*

$$\left| x(t;\mu) - x(t;\mu_0) \right| \le \varepsilon, \quad \forall t \in [\theta, t_{10}], \ \theta = \max\{t_0, t_{00}\};$$

2.3. ყოველი $\varepsilon > 0$*-თვის არსებობს ისეთი* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$ რიცხვი, რომ ყოველი $\mu \in V(\mu_0; K_1, \delta_2, \alpha)$-თვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას

$$\int_{\hat{\tau}}^{t_{10}} \left| x(t;\mu) - x(t;\mu_0) \right| dt \le \varepsilon.$$

ვთქვათ,

$$E_\mu = \left\{ \mu = (t_0, x_0, \varphi, f) : t_0 \in \mathbb{R}, \ x_0 \in \mathbb{R}^n, \varphi \in C(I_1, \mathbb{R}^n), f \in E_f \right\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times C(I_1, \mathbb{R}^n) \times E_f.$$

$\delta\mu = \mu - \mu_0 = (\delta t_0, \delta x_0, \delta\varphi, \delta f)$ ელემენტს ეწოდება μ_0 ელემენტის ვარიაცია.

აქ

$$\delta t_0 = t_0 - t_{00}, \ \delta x_0 = x_0 - x_{00}, \ \delta\varphi = \varphi - \varphi_0, \ \ \delta f = f - f_0;$$

$\delta t_0 \in \mathbb{R}_{\delta t_0} = \mathbb{R} - t_{00}$ -ს ეწოდება საწყისი t_{00} მომენტის ვარიაცია; $\delta x_0 \in \mathbb{R}^n_{\delta x_0} = \mathbb{R}^n - x_{00}$ - საწყისი x_{00} ვექტორის ვარიაცია; $\delta\varphi \in C_{\delta\varphi} = C(I_1, \mathbb{R}^n) - \varphi_0$ -საწყისი φ_0 ფუნქციის ვარიაცია;

$\delta f \in E_{\delta f} = E_f - f_0$ -განტოლების მარჯვენა მხარის f_0-ის ვარიაცია;

ვარიაციათა $E_{\delta\mu} = E_\mu - \mu_0 = \left\{ \delta\mu = \mu - \mu_0 : \mu \in E_\mu \right\}$ სივრცეში შემოვიღოთ შემდეგი სიმრავლე

$$V = \Big\{ \delta\mu = (\delta t_0, \delta x_0, \delta\varphi, \delta f) \in E_{\delta\mu} : |\delta t_0| \le \gamma, \ |\delta x_0| \le \gamma,$$
$$\|\delta\varphi\|_{I_1} \le \gamma, \ \delta f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta f_i, \ |\lambda_i| \le \gamma, \ i = \overline{1, k} \Big\}, \qquad (2.4)$$

სადაც $\gamma > 0$ ფიქსირებული რიცხვია , ხოლო $\delta f_i \in E_f - f_0, \ i = \overline{1,k}$ ფიქსირებული ფუნქციები . ცხადია, რომ

$$\left\{ \delta f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta f_i \ : |\lambda_i| \le \gamma, \ i = \overline{1, k} \right\}$$

სიმრავლე არის ნოლის მიდამო სასრულგანზომილებიან

$$L = \left\{ \delta f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta f_i \ : \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, k} \right\}$$

სივრცეში. ამრიგად , (2.4) სიმრავლე არის $\mathbb{R}_{\delta t_0} \times \mathbb{R}^n_{\delta x_0} \times C_{\delta\varphi} \times L \subset E_{\delta\mu}$ სივრცის ნოლის მიდამო.

თეორემა 2.2. *ვთქვათ $x_0(t) = x(t; \mu_0)$ არის $\mu_0 = (t_{00}, x_{00}, \varphi_0, f_0) \in \Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_{10}]$-ზე და ვთქვათ $K_1 \subset O$ კომპაქტი მოიცავს $\varphi_0(I_1) \cup x_0([t_{00}, t_{10}])$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს. მაშინ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

2.4. არსებობს $\varepsilon_1 > 0$ ისეთი, რომ ყოველ $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_1) \times V$ -თვის გვაქვს $\mu_0 + \varepsilon\delta\mu \in \Lambda$

და მას შეესაბამება $x(t; \ \mu_0 + \varepsilon\delta\mu)$ ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, \ t_{10}]$-ზე. ამასთან,

$$x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) \in K_1;$$

2.5. სრულდება შემდეგი თანაფარდობები:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ |x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - x(t; \mu_0)| : t \in [\theta, t_{10} + \delta_1] \right\} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\hat{\tau}}^{t_{10}} |x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - x(t; \mu_0)| dt = 0$$

თანაბრად $\delta\mu \in V$ -ს მიმართ, სადაც $\theta = \max\{t_{00}, \ t_{00} + \varepsilon\delta t_{00}\}$.

თეორემა 2.2 არის თეორემა 2.1-ის შედეგი.

ვთქვათ, $E_u(I)$ ზომად $u(t)\in\mathbb{R}^r, t\in I$ ფუნქციათა სივრცეა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $clu(I)$ კომპაქტური სიმრავლეა $\mathbb{R}^r$-ში. ვთქვათ $U_0\subset\mathbb{R}^r$ არის ღია სიმრავლე და $\Omega=\Omega(I,U_0)=\{u\in E_u(I): clu(I)\subset U_0\}$.

ყოველ $w=(t_0,x_0,\varphi,u)\in\Lambda_1=[a,b)\times O\times\Phi\times\Omega(I,U_0)$ ელემენტს შევუსაბამოდ სამართი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t)=\phi(t,x(t),x(t-\tau),u(t)) \qquad (2.5)$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[\hat{\tau},t_0),\ \ x(t_0)=x_0. \qquad (2.6)$$

აქ $\phi(t,x,x_1,u)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $I\times O^2\times U_0$-ზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) ყოველი ფიქსირებული $(x,x_1,u)\in O^2\times U_0$-თვის $\phi(\bullet,x,x_1,u): I\to\mathbb{R}^n$ ფუნქცია ზომადია;

2) ყოველი $K\subset O$ და $U\subset U_0$ კომპაქტური სიმრავლეებისთვის არსებობს $m_{K,U}(t),\ L_{K,U}(t)\in L_1(I,R_+)$ ფუნქციები ისეთი, რომ თითქმის ყველა $t\in I$-თვის სრულდება უტოლობები

$$\left|\phi(t,x,x_1,u)\right|\le m_{K,U}(t),\ \ \forall(x,x_1,u)\in K^2\times U,$$

$$\left|\phi(t,x,x_1,u_1)-\phi(t,y,y_1,u_2)\right|\le L_{f,K}(t)\Big[\left|x-y\right|+\left|x_1-y_1\right|+\left|u_1-u_2\right|\Big]$$

$$\forall(x,x_1)\in K^2,\ \ \forall(y,y_1)\in K^2\ \text{ და }\ \forall(u_1,u_2)\in U^2.$$

განსაზღვრება 2.2. ვთქვათ $w=(t_0,x_0,\varphi,u)\in\Lambda_1$. $x(t)=x(t;w)\in O,\ t\in[\hat{\tau},t_1],\ t_1\in(t_0,b]$ ფუნქციას ეწოდება (2.5) განტოლების ამონახსნი (2.6) საწყისი პირობით ან w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_1]$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (2.6)-ს , აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე და თითქმის ყველგან აკმაყოფილებს (2.5) განტოლებას.

თეორემა 2.3. *ვთქვათ $x_0(t)=x(t;w_0)$ არის $w_0=(t_{00},x_{00},\varphi_0,u_0)\in\Lambda_1$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_{10}]$-ზე და ვთქვათ $K_1\subset O$ კომპაქტი მოიცავს $\varphi_0(I_1)\cup x_0([t_{00},t_{10}])$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს.მაშინ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

2.6. არსებობს $\delta_0>0$ ისეთი, რომ ყოველ

$$w=(t_0,x_0,\varphi,u)\in\hat{V}(w_0;\delta_0)=B(t_{00};\delta_0)\times B(x_{00};\delta_0)\times B(\varphi_0;\delta_0)\times B(u_0;\delta_0)$$

ელემენტს შეესაბამება $x(t;w)$ *ამონახსნი განსაზღვრული* $[\hat{\tau},t_{10}]$ *ინტერვალზე და აკმაყოფილებს პირობას* $x(t;w)\in K_1$,

აქ $B(u_0;\delta_0)=\{u\in\Omega: \|u-u_0\|_I<\delta_0\}$;

2.7. ყოველი $\varepsilon>0$ *-თვის არსებობს ისეთი* $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)\in(0,\delta_0)$ *რიცხვი, რომ ყოველი* $w\in\hat{V}(w_0;\delta_1)$ *:-თვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას*

$$\left|x(t;w)-x(t;w_0)\right|\le\varepsilon,\ \ \forall t\in[\theta,t_{10}],\ \theta=\max\left\{t_0,t_{00}\right\};$$

2.8. ყოველი $\varepsilon>0$ *-თვის არსებობს ისეთი* $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)\in(0,\delta_0)$ რიცხვი, რომ ყოველი $w\in\hat{V}(w_0;\delta_2)$ -თვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას

$$\int_{\hat{\tau}}^{t_{10}}\left|x(t;w)-x(t;w_0)\right|dt\le\varepsilon.$$

ვთქვათ,

$$E_w=\left\{w=(t_0,x_0,\varphi,w):\ t_0\in\mathbb{R},\ x_0\in\mathbb{R}^n,\varphi\in C(I_1,\mathbb{R}^n),u\in E_u(I)\right\}=$$
$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times C(I_1,\mathbb{R}^n)\times E_u(I).$$

$\delta w=w-w_0=(\delta t_0,\delta x_0,\delta\varphi,\delta u)$ ელემენტს ეწოდება w_0 ელემენტის ვარიაცია.

ვარიაციათა $E_{\delta w}=E_w-w_0=\left\{\delta w=w-w_0: w\in E_w\right\}$ სივრცეში შემოვიღოთ შემდეგი სიმრავლე

$$V_1=\left\{\delta w=(\delta t_0,\delta x_0,\delta\varphi,\delta u)\in E_{\delta w}: \left|\delta t_0\right|\le\gamma,\ \left|\delta x_0\right|\le\gamma,\ \left\|\delta\varphi\right\|_{I_1}\le\gamma,\ \left\|\delta u\right\|_I\le\gamma\right\},$$

სადაც $\gamma>0$ ფიქსირებული.

თეორემა 2.4. *ვთქვათ* $x_0(t)=x(t;w_0)$ *არის* $w_0=(t_{00},x_{00},\varphi_0,u_0)\in\Lambda_1$ *ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული* $[\hat{\tau},t_{10}]$ *-ზე,* $t_{00},t_{10}\in(a,\,b)$ *და ვთქვათ* $K_1\subset O$ *კომპაქტია, რომელიც მოიცავს* $\varphi_0(I_1)\cup x_0([t_{00},t_{10}])$ *სიმრავლის რაიმე მიდამოს.* მაშინ შესრულებულია *შემდეგი პირობები:*

2.9. არსებობს $\varepsilon_1>0$ *ისეთი, რომ ყოველ* $(\varepsilon,\delta w)\in(0,\varepsilon_1)\times V_1$ *-თვის* $w_0+\varepsilon\delta w\in\Lambda_1$ და მას შეესაბამება $x(t;\,w_0+\varepsilon\delta w)$ ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau},\,t_{10}]$-ზე. ამასთან, $x(t;w_0+\varepsilon\delta w)\in K_1$;

2.10. სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\{ \left|x(t;w_0+\varepsilon\delta w)-x(t;w_0)\right| : t\in[\theta,t_{10}+\delta_1] \right\}=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\hat{\tau}}^{t_{10}+\delta_1}\left|x(t;w_0+\varepsilon\delta w)-x(t;w_0)\right|dt=0$$

თანაბრად $\delta w\in V_1$ *-სთვის, სადაც* $\theta=\max\{t_{00},\ t_{00}+\varepsilon\delta t_{00}\}$.

თეორემა 2.4 არის თეორემა 2.3-ის შედეგი.

დასკვნა

ნაშრომში, განხილულია ეკონომიკური ზრდის , იმუნური პასუხისს და საფრენი აპარატის დიფერენციალური მოდელები დაგვიანების ფაქტორის გათვალისწინებით. არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებისთვის მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში და წყვეტილი საწყისი პირობით, მოყვანილია კოშის ამოცანის კორექტულობის (ამონახსნის უწყვეტად დამოკიდებულების) თეორემები საწყისი მონაცემებისა და განტოლების მარჯვენა მხარის შეშფოთებების მიმართ. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, საწყისი ფუნქციისა და საწყისი ვექტორის ერთობლიობა, იგი მცირეა სტადარტული ნორმით. განტოლების მარჯვენა მხარის შეშფოთება მცირეა ინტეგრალური აზრით. ანალოგიური თეორემები მოყვანილია სამართი დაგვიანებულ არგუმენტიანი განტოლებისთვის.

ლიტერატურა

1. R. V. Gamkrelidze and G. L. Kharatishvili , Extremal problems in linear topological spaces . (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 33 (4) (1969) ,781-839.
2.T. Tadumadze, Variation formulas of solutions for functional differential equations with several constant delays and their applications in optimal control problems, Mem. Diff. Eq. Math. Phys. 70 (2017), 7-97 .
3. T. Tadumadze, Delay differential equations: mathematical models, well-posedness, Course of Lecture for the West Asia Mathematical School "Inverse Problems: Direct Methods and Optimization ", October 28 -November 4, 2018 , Nesin Mathematics Village-Izmir-Turkey.