ივანე ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

შვარც–კრისტოფელის ასახვების გამოთვლითი ასპექტები

მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი კაკულაშვილი

(დოქტორანტის პირველი სემინარი)

ხელმძღვანელი:

ფიზიკა – მათემატიკის მეცნიერებათა

დოქტორი

ასოცირებული პროფესორი

გია გიორგაძე

თბილისი 2018

სარჩევი

ანოტაცია

შვარც–კრისტოფელის ასახვით რთული კონტურით შემოსაზღვრული არე კომპლექსურ სიბრტყეზე შესაძლებელია კონფორმულად აისახოს მრავალკუთხედით შემოსაზღვრულ არეში. ასახვის კონსტრუქციულ აგებას ხელს უშლის ე.წ. აქსესორული პარამეტრების არსებობა, რომელთა განსაზღვრა ზოგად შემთხვევაში გარკვეულ პრობლემებთანაა დაკავშირებული და ცნობილი არ არის.

ნასრომში შემოთავაზებულია ამ პრობლემის გადაჭრის ერთ–ერთი შესაძლო გზა. გადაწვეტილი ამოცანა შესაძლებელია გამოყენებული იქნას ინტეგრალური სქემების გეომეტრიის დამოკიდებულების შესასწავლად ელექტრონული სქემის სხვადას ელექტრონულ მახასიათებლებზე და ელიფსური განტოლებების სასაზღვრო ამოცანების ანალიზისათვის.

Resume

By Schwarz—Christoffel mapping, we can conformally map area, with complex contour to a area, with bounded polygonal contour. The mapping constuction contains parameters, which in general are very complicated for calculations and remain undefined. This problem is also known as Schwarz—Christoffel Parametric Problem.

In the Article will be offered one possible solution for the problem and its multifaceted applications can be used for different electronic characteristics of electronic circuits. The method of solving the boundary tasks of the elliptical equation will also can be considered.

ᲨᲕᲐᲠᲪ-ᲙᲠᲘᲡᲢᲝᲤᲔᲚᲘᲡ ᲨᲔᲡᲐᲮᲔᲑ

კონფორმული ასახვების აქტიური შესწავლა დაიწყო XIX საუკუნის დასაწყისში. გაუსი განიხილავდა ასეთ პრობლემებს 1820 წლებში. რიმანის თეორემა იყო წამოდგენი 1851 წელს, რომლის თანახმად: ნებისმიერი მარტივი შეკრული არე კოპლექსური სიბრტყეზე შეიძლება კონფორმულად აისახოს სხვაზე, იმ პირობით თუ არცერთია სრული სიბრტყე. მოგვიანებით აღმოაჩინეს შვარც–კრისტოფელის თეორემა, ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად კრისტოფელმა 1867 და შვარცმა 1869 წელს.

რიმანის თეორემა უზრუნველყოფს იმას, რომ ზედა ნახევარ სიბრტყე კონფორმულად ექვივალენტურია არის, რომელიც განსაზღვრულია ნებისმიერი მრავალკუთხედით. შვარც–კრისტოფელის ასახვა საშვალებას გვაძლევს ავაგოთ კონფორმული ასახვები ზედა ნახევარ სიბრტიდან მრავალკუთხედში, მაგრამ ამისთვის საჭიროა ამოიხსნას პარამეტრების პრობლემა. ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ, როგორ გადაყავს ამ ასახვას ღერძლი მრავალკუთხედის საზღვარში, მისი კუთხეების განლაგება და შევადგინოთ ალგორითმი, რომელიც საშვალებას მოგვცემს გამოთვალოთ და პარამეტრების შერჩიოთ მოცემილი მრავალკუთხედისთვის.

იდეა შვარც–კრისტოფელის გარდაქმნის უკან არის ის, რომ f გარდაქმნას შეიძლება ქონდეს წარმოებული, რომელიც ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$f' = \prod f_k$$

სადაც f_k კანონიკური ფუნქციებია. გეომეტრიულად ეს შეიძლება ჩაიწეროს როგორც

$$\arg f' = \sum \arg f_k$$

კლასიკურ გარდაქმნებში, ყოველი $\arg f_k$ არის ისე აგებული, რომ იყოს ბიჯის ფექცია, და $\arg f'$ არის უბან უბან მუდმივი ფუნცია, სპეციფიკური ნახტომებით. ამის შედეგად f ასახავს ღერძს მრავალწევრზე.

განზოგადოებული მრავალკუთხედი Γ განისაზღვრება, როგორც კოლექცია

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

წვეროების და

$$\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$$

ნამდვილი შიდა კუთხეების. წვეროები, რომლებიც მდებარეობენ გაფართოებულ კოფლექსურ სიბრტყეში $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, მოიცემა საათის ისრის საწინააღმდეგო თანმიმდევრობით, მრავალკუთხედის ინტერიერის მიმართ. მრავალკუთხედის გარე კუთხეების ჯამი უნდა იყოს 2π, რაც ნიშნავს

$$\sum_{k=1}^{n}(1-\alpha_k) = 2$$

ან, რაც იგივეა

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = n-2$$

თეორემა 3.1. ვთქვათ P არის Γ მრავალკუთხედის ინტერიერი, რომელსაც აქვს

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

წვეროები და

$$\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$$

შიგა კუთხეები, საათის ისრის საწინააღმდეგო თანმიმდევრობით. თუ f არის ნებისმიერი კონფორმული ასახვა H^+ ზედა ნახევარ სიბრტყიდან P–ზე, პირობით $f(\infty) = w_n$, მაშინ

$$f(z) = A + C\int^{z}\prod_{k=1}^{n-1}(\zeta - z_k)^{\alpha_k - 1}\,d\zeta$$

სადაც A და C რაიმე კომპლექსური მუდმივებია და $w_k = f(z_k)$, როცა $k = 1, \ldots, n-1$.

მსგავსად თეორემა ყალიბდება დისკისთისაც.

თეორემა 3.2. ვთქვათ P არის Γ მრავალკუთხედის ინტერიერი, რომელსაც აქვს

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

წვეროები და

$$\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$$

შიგა კუთხეები, საათის ისრის საწინააღმდეგო თანმიმდევრობით. თუ f არის ნებისმიერი კონფორმული ასახვა E დისკიდან P–ზე, მაშინ

$$f(z) = A + C\int^z \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\zeta}{z_k}\right)^{\alpha_k-1} d\zeta$$

სადაც A და C რაიმე კომპლექსური მუდმივებია და $w_k = f(z_k)$, როცა $k = 1, \ldots, n$.

მრავალკუთხედი ერთი ან ორი წვეროთი

სანამ დავიწყებით ასახვის მნიშვნელობების გმოთვლას, საჭიროა შევარჩიოთ წინაწვეროები z_k და მუდმივები A და C. ჩვენ გვაქვს გარკვეული თავისუფლება ამ პარამეტრების შერჩევისას. რიმანის თეორემის თანახმად, შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი სამი წერტილი $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ სიმრავლიდან და ავსახოთ Γ–ს ნებისმიერ სამ წერტილზე, მანამ სანამ მათი მიმართულება შენარჩინებულია. ამიტომ, რაცა წვეროების რაოდენობა არაუმეტეს 3–ია, ჩვენ არ გვაქვს პარამეტრების პრობლემა.

მრავალკუთხედი, რომლის წვეროების რაოდენობა არის 1, არის მხოლოდ წრფე, წვეროთი $w_1 = \infty$ და $\alpha_1 = -1$. ამიტომ ვიღებთ

$$f(z) = A + C\int^z (\zeta - z_1)^{-2}\, d\zeta = A + \frac{C}{z - z_1}$$

თუ $n = 2$, მაშინ $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ და ვიღებთ ორ შემთხვავას $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ან $\alpha_1 = -\alpha_2 \neq 0$. პირველ შემთხვევაში, ორივე წვერო უსასრულობაშია და P არის წრფე. ასახვა H^+ ნახევარ სიბრტიდან არის

$$f(z) = A + C\int^z (\zeta - z_1)^{-1}(\zeta - z_2)^{-1}\, d\zeta = A + C\log\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right)$$

მეორე შემთხვევაში, ერთი წვერო სასრულია და მეორე უსასრულო. ვთქვათ $w_2 = \infty$, ამიტომ გვაქვს შემდეგი სახე

$$f(z) = A + C\int^z (\zeta - z_1)^{\alpha_1 - 1}\, d\zeta = A + C(z - z_1)^{\alpha_1}$$

გვერდის სიგრძის პარამეტრების პრობლემა

ნებისმიერი რიცხვითი მეთოდის, რომელიც არის შვარც–კრისტოფელის ასახვის, დადის პარამეტრების პრობლე–მაზე. ფორმულაში

$$f(z) = A + C \int^{z} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{\alpha_k - 1} d\zeta$$

ექსპონენტები სწორად ასახავენ კუთხეებს ანასახში, მიუხედავად z_k წინა წვეროების რიცხვითი მნიშვნელობისა. მიუ–ხედავად ამისა, მათი მნიშვნელობები განსაზღვრება ანასახის გვერდის სიგრძეებს. იმისთვის, რომ

შვარცის ლემა და ანარეკლის პრინციპი

აქ მოყვანილია, შვარცის მიერ გაკეთებული, ორი მნიშვნელოვანი შედეგი.

ლემა 6.1. ვთქვათ $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ არის ანალიტიკური ფუნცია. თუ $f(0) = 0$, მაშინ

$$|f(z)| \geq |z| \text{ და } |f'(0)| \geq 1.$$

მეტიც, თუ $|f(z)| = |z|$, რაიმე $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ან $|f'(0)| = 1$, მაშინ $f(z) = cz$, რაიმე $|c| = 1$.

ამ ლემიდან გამომდინარე ყველა კონფორმული ექვივალენტობა $\mathbb{D}$ სიმრავლესა და თავის თავს შორის გამოი–სახება მობიუსის გარდაქმნით. მართლაც, ვთქვათ f კონფორმულად ასახავს $\mathbb{D}$ თავის თავში. შევარჩიოთ მობიუსის გარდაქმნა T, რომელიც ასახავს $\mathbb{D}$ თავის თავში და $T \circ f(0) = 0$. შვარცის ლემის თანახმად არსებობს c ისეთი, რომ $(T \circ f)(z) = cz$ ყველა $z \in \mathbb{D}$.

ლემა 6.2. ვთქვათ Ω არის სიმეტრიული რეგიონი და

$$\Omega^+ := \Omega \cap \mathbb{H} \text{ და } \sigma := \Omega \cap \mathbb{R}.$$

ვთქვათ v უწყვეტია $\Omega^+ \cup \sigma$, ჰარმონიული Ω^+–ზე და 0–ია σ სიმრავლეზე. მაშინ v აქვს ჰარმონიული გაგრძელება Ω სიმრავლზე, რომელიც აქმაყოფილებს სიმეტრიულობის პირობას

$$v(\overline{z}) = -v(z).$$

იგივე პირებობში, თუ v არის წამოსავითი ნაწილი f ანალიტიკური ფუნციის Ω^+, მაშინ f შეიძლება გაგრძელდეს ანა–ლიტიკური ფუნციამდე, მთელ Ω სიმრავლეზე, ფორმულით

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

ᲠᲘᲛᲐᲜᲘᲡ ᲐᲡᲐᲮᲕᲘᲡ ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ

მოცემული ორი სიმრავლისთვის D და D', ჩვენ ვიტყვით, რომ f კონფორმულად ასახავს D-ს D' სიმრავლეზე, თუ სრულდება შემდეგი პირობები

(i) f ანალიტიკურია D-ზე

(ii) f ინექციურია

(iii) $f(D) = D'$

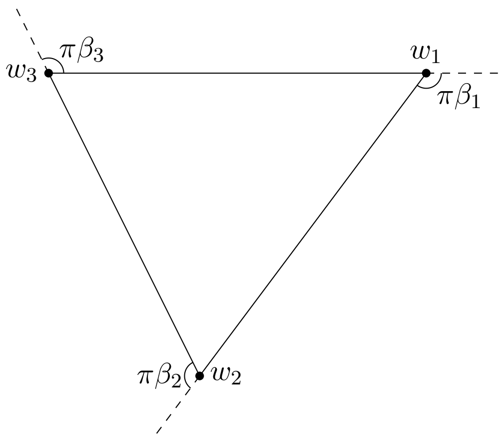
თეორემა 7.1. ვთქვათ U არის მარტივი ბმული ღია წესიერი ქვესიმრავლე $\mathbb{C}$ კომპლექსური სიბრტყის და ავიღოთ $z_0 \in U$. მაშინ არსებობს უნიკალური f ფუნქცია, რომელიც კონფორმულად ასახავს U სიმრავლეს $\mathbb{D}$-ზე, ისე რომ

$$f(z_0) = 0 \text{ და } f'(z_0) > 0$$

აქედან გამომდინარე კომპლექსური სიბრტყის ნებისმიერი ორი მარტივი ბმული წესიერი ქვესიმრავლე შეიძლება ავსახოთ კონფორმულად ერთმანეთში.

ᲛᲠᲐᲕᲐᲚᲙᲣᲗᲮᲔᲓᲘᲡ ᲐᲒᲔᲑᲐ

ავიღოთ სიბრტყეზე სამი წერტილი w_1, w_2, w_3, ისეთი, რომ $\mathrm{Im}(w_1) = \mathrm{Im}(w_3) = 0$ და გადავნომროთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით გარე კუთხეები



მარტივი საჩვენებელია, რომ წვეროებსა და გარე კუთხეებს შორის არის შემდეგი დამოკიდებულება

$$w_2 = w_1 + |w_2 - w_1| e^{-\beta_1 \pi i}$$
$$w_3 = w_2 + |w_3 - w_2| e^{-(\beta_1+\beta_2)\pi i} = w_1 + |w_2 - w_1| e^{-\beta_1 \pi i} + |w_3 - w_2| e^{-(\beta_1+\beta_2)\pi i}$$

განვიხილოთ შვარც–კრისტოფელის ფორმულა $n = 3$, როცა $A = 0$ და $C = 1$

$$f(z) = \int^z \left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta$$

განვიხილოთ შემთხვევები, როცა $z = z_1, z = z_2$ და $z = \infty$

$$
\begin{aligned}
f(z_1) &= \int^{z_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta = a + \int_0^{z_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta \\
f(z_2) &= \int^{z_2} \left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta \\
&= \int^{z_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta + \int_{z_1}^{z_2} \left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta \\
&= f(z_1) + e^{-\beta_1 \pi i} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\zeta}{z_1} - 1\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta \\
f(z_3) &= \int^{z_3} \left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta \\
&= f(z_1) + e^{-\beta_1 \pi i} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\zeta}{z_1} - 1\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta + \int_{z_2}^{z_3} \left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta \\
&= f(z_1) + e^{-\beta_1 \pi i} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\zeta}{z_1} - 1\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} d\zeta \\
&+ e^{-(\beta_1 + \beta_2)\pi i} \int_{z_2}^{z_3} \left(\frac{\zeta}{z_1} - 1\right)^{-\beta_1} \left(\frac{\zeta}{z_2} - 1\right)^{-\beta_2} d\zeta
\end{aligned}
$$

როგორც ვხედავთ, $f(z)$ კომპლექსური ფუნცია ისე გაიშალა მოცემული წერტილებისთვის, როგორც ზემოთ მოყვანილი სამკუთხედის წვეროები, ხოლო ინტეგრალ ქვეშ გამოსახულებები არიან არაუაყოფითები, ამიტომ ისინი საზღვრავენ მრავალკუთხედის გვერდის სიგრძეს და მის წინ მგომი კოეფიციენტები უზრუნველყოფენ, რომ გარე კუთხეები შენარჩუნდეს.

ხარისხოვან მწკრივად გაშლის შესახებ

ჩვენი მიზანია ხარისხოვან მწკრივად გავშალოთ

$$
\prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{-\beta_k}
$$

ნამრავლი. ამისთვის უნდა განვილოთ, თუ როგორ ხდება ნამრავლის წევრების გაშლა. ტეილორის მწკრივის თანახმად

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k, \quad |x| < 1 \\
(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}, \quad |x| > 1
\end{aligned}
$$

სადაც $x, n \in \mathbb{R}$, ხოლო კოეფიციენტები შემდეგნაირია

$$
\binom{n}{0} = 1 \quad \text{და} \quad \binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}
$$

ჩვენ განვიხილავთ $\zeta, z_k \in \mathbb{R}$, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მეცული გაშა. ეს მწკრივი სამართლიანია

$$
x \in \mathbb{C} \setminus \{|x| = 1\}
$$

შემთხვევაშიც, რადგან სინგულარობა გვაქვს მხოლოდ ერთეულოვან წრეწირზე.

განსაზღვრება 9.1. λ_n და μ_n განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$\lambda_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)=\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}\frac{1}{z_j^{k_j}}\right)$$

$$\mu_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)=\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}\frac{1}{z_j^{\alpha_j-k_j}}\right)$$

წინადადება 9.1. თუ ჩვენ ავიღებთ $\{(z_j,\alpha_j)\}_{j=1}^N$ მიმდევრობას, ისეთს რომ $0<|z_j\zeta|<1$, მაშინ

$$\prod_{j=1}^{N}(1+\zeta z_j)^{\alpha_j}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}z_j^{k_j}\right)\right)\zeta^n$$

ანალოგიურად, თუ $|z_j\zeta|>1$, მაშინ

$$\prod_{j=1}^{N}(1+\zeta z_j)^{\alpha_j}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}z_j^{\alpha_j-k_j}\right)\right)\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N-n}$$

დამტკიცება. თუ $0<|z_j\zeta|<1$, მაშინ

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N}(1+\zeta z_j)^{\alpha_j}&=\prod_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k}(\zeta z_j)^k=\sum_{k_1,\ldots,k_N}\binom{\alpha_1}{k_1}\cdots\binom{\alpha_N}{k_N}z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}\zeta^{k_1+\cdots+k_N}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\binom{\alpha_1}{k_1}\cdots\binom{\alpha_N}{k_N}z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}\right)\zeta^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}z_j^{k_j}\right)\right)\zeta^n\end{aligned}$$

თუ $|z_j\zeta|>1$, მაშინ

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N}(1+\zeta z_j)^{\alpha_j}&=\left(\prod_{j=1}^{N}(\zeta z_j)^{\alpha_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{1}{\zeta z_j}\right)^{\alpha_j}\right)\\&=\left(\prod_{j=1}^{N}(\zeta z_j)^{\alpha_j}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}\frac{1}{z_j^{k_j}}\right)\right)\zeta^{-n}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_N=n}\left(\prod_{j=1}^{N}\binom{\alpha_j}{k_j}z_j^{\alpha_j-k_j}\right)\right)\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N-n}\end{aligned}$$

შენიშვნა 9.1. წინადადება 9.1–დან გამომდინარე ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი

$$\prod_{j=1}^{N}\left(1-\frac{\zeta}{z_j}\right)^{\alpha_j}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\lambda_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^n,\quad\left|\frac{\zeta}{z_j}\right|<1$$

და

$$\prod_{j=1}^{N}\left(1-\frac{\zeta}{z_j}\right)^{\alpha_j}=e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mu_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N-n},\quad\left|\frac{\zeta}{z_j}\right|>1$$

ორივე გაშლაში მწკრივი ყოველთვის ნამდვილია.

წინადადება 9.2. თუ $x \neq 0$ და $n \in \mathbb{N}$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^{-j}\right) = \sum_{r=-n}^{n}\left(\sum_{i-j=r} a_i b_j\right) x^r$$

სადაც „$i - j = r$“ გამოსახულება ნიშნავს, რომ i და j არიან არაუარყოფითი მთელი რიცხვები და აკმაყოფილებენ განტოლებას.

მაგალითი 9.1. თუ $n = 2$

$$\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2} b_j x^{-j}\right) = \sum_{r=-2}^{2}\left(\sum_{i-j=r} a_i b_j\right) x^r =$$

$$\frac{a_0 b_2}{x^2} + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_2}{x} + (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_0 + a_2 b_1)x + a_2 b_0 x^2$$

თუ დავალაგებთ კოეფიციენტებს ცხრილში, მივიღებთ

$$\begin{matrix} a_0 b_0 & a_1 b_0 & a_2 b_0 \\ a_0 b_1 & a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_0 b_2 & a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{matrix}$$

$(n+1) \times (n+1)$ განზომილების კვადრატულ მატრიცას და $|r| \leq n$

$$\sum_{i-j=r} a_i b_j = \sum_{i=r}^{n} a_i b_{i-r}$$

თეორემა 9.1. თუ ავიღობთ $\{(z_j,\alpha_j)\}_{j=1}^{N}$, ისეთი რომ $0<z_1<z_2<\cdots<z_{n-1}<z_N$ და $\zeta\geq 0$ მაშინ

$$\prod_{j=1}^{N}\left(1-\frac{\zeta}{z_j}\right)^{\alpha_j}$$

ნამრავლი შეგვიძლია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად

1. თუ $\forall z_j : 0<|\zeta/z_j|<1$

$$\begin{aligned} S_k^{(0)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right) &= \sum_{n=0}^{k}(-1)^n\lambda_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^n \\ &= L_k^{(0)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right) \end{aligned}$$

2. თუ $\forall z_j : |\zeta/z_j|>1$

$$\begin{aligned} &S_k^{(N)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right) \\ &\quad= e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)\pi i}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\mu_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N-n} \\ &\quad= e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)\pi i}L_k^{(N)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right) \end{aligned}$$

3. თუ $|z_j|<|\zeta|<|z_{j+1}|$, სადაც $j=\overline{1,N-1}$

$$\begin{aligned} &S_k^{(j)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right) \\ &\quad= S_k^{(N)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_j;z_1,\ldots,z_j\right)S_k^{(0)}\left(\zeta;\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_N;z_{j+1},\ldots,z_N\right) \\ &\quad= e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)\pi i}\sum_{n=-k}^{k}(-1)^n\xi_n^{k,j}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right)\zeta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_j-n} \\ &\quad= e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)\pi i}L_k^{(j)}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right) \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} &\xi_n^{k,j}\left(\zeta;\alpha_1,\ldots,\alpha_N;z_1,\ldots,z_N\right) \\ &\quad= \sum_{r=n}^{k}\lambda_r\left(\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_N;z_{j+1},\ldots,z_N\right)\mu_{r-n}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_j;z_1,\ldots,z_j\right) \end{aligned}$$

პარამეტრების შერჩევა

განვიხილოთ შვარც–კრისტოფელის ფორმულის ზოგადი ფორმა

$$f(z)=a+c\int_0^z\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\zeta}{z_k}\right)^{-\beta_k}d\zeta$$

სადაც a, c და z_k პარამეტრებია, აქედან პირველი ორია კომპლექსური, ხოლო დანარჩენი ნამდვილი. თუ ავიღებთ, რომ c ნამდვილია, მაშინ მრავალკუთხედის გვერდის სიგრძე შეგდეგნაირად შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$l_j=|f(z_{j+1})-f(z_j)|=c\int_{z_j}^{z_{j+1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\zeta}{z_k}\right)^{-\beta_k}d\zeta$$

თეორემა 9.1–ის თანახმად

$$\tilde{l}_j\left(c; z_1, \ldots, z_{n-1}\right) = c \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} L_u^{(j)}\left(\zeta; -\beta_1, \ldots, -\beta_{n-1}; z_1, \ldots, z_{n-1}\right) d\zeta$$

სადაც u წინასწარ დასახელებული ნატურალური რიცხვია.

ავაგოთ ცდომილების ფუნცია

$$C(\tilde{l}_1, \ldots, \tilde{l}_N) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\tilde{l}_j - l_j\right)^2, \quad N = n-1$$

ჩვენი მიზანია ამ ფუნციის მინიმიზაცია. ამისთვის ვაგებთ გრადიენტს

$$\nabla C = \left[\frac{\partial C}{\partial c}, \frac{\partial C}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial C}{\partial z_N}\right]$$

ჯაჭვის წესის გამოყენებით ჩვენ ვიღებთ

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{l}_j} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \tilde{l}_j} \left(\tilde{l}_j - l_j\right)^2 = \frac{1}{2N}\left(\tilde{l}_j - l_j\right)$$

$$\nabla_c C = \frac{\partial C}{\partial c} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial C}{\partial \tilde{l}_j} \frac{\partial \tilde{l}_j}{\partial c} = \frac{1}{cN} \sum_{j=1}^{N} \tilde{l}_j \frac{\partial C}{\partial \tilde{l}_j} = \frac{1}{2cN} \sum_{j=1}^{N} \tilde{l}_j \left(\tilde{l}_j - l_j\right)$$

$$\nabla_k C = \frac{\partial C}{\partial z_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial C}{\partial \tilde{l}_j} \frac{\partial \tilde{l}_j}{\partial z_k} = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} \left(\tilde{l}_j - l_j\right) \frac{\partial \tilde{l}_j}{\partial z_k}$$

$\tilde{l}_j$ ფუნქციის კერძო წარმოებული აპროქსიმაცია არის

$$\partial_k \tilde{l}_j = \frac{\partial \tilde{l}_j}{\partial z_k} \approx \frac{\tilde{l}_j(c; z_k + h) - \tilde{l}_j(c; z_k - h)}{2h}, \quad h \to 0$$

ახლა ჩვენ შეგვიძლია დავაკორექტიროთ პარამეტრები შემდეგნაირად

$$c \leftarrow c - \gamma \nabla_c C$$
$$z_k \leftarrow z_k - \gamma \nabla_k C$$

სადაც $\gamma > 0$ პარამეტრია, რომელსაც პრაქტიკულად ვარჩევთ.

$$\nabla_z C = \begin{bmatrix} \nabla_1 C \\ \nabla_2 C \\ \cdots \\ \nabla_N C \end{bmatrix} = \frac{1}{2N} \begin{bmatrix} \partial_1 \tilde{l}_1 & \partial_1 \tilde{l}_2 & \cdots & \partial_1 \tilde{l}_N \\ \partial_2 \tilde{l}_1 & \partial_2 \tilde{l}_2 & \cdots & \partial_2 \tilde{l}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_N \tilde{l}_N & \partial_N \tilde{l}_N & \cdots & \partial_N \tilde{l}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 - l_1 \\ \tilde{l}_2 - l_2 \\ \cdots \\ \tilde{l}_N - l_N \end{bmatrix}$$

ლიტერატურა

[1] Schwarz-Christoffel Mapping by Tobin A. Driscoll and Lloyd N. Trefethen.

[2] Schwarz-Christoffel Transformations by Philip P. Bergonio (Under the direction of Edward Azoff).