ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თეა შავაძე

ოპტიმალური მართვის ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით და მრავალი მუდმივი დაგვიანებით

მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში
მე-7 საფაკულტეტო კონფერენციაზე წარსადგენად
დოქტორანტის სემინარი 2

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე

ფიზიკა–მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

თბილისი 2019

ანოტაცია

არაწრფივი ოპტიმალური ამოცანისთვის წყვეტილი საწყისი პირობით, მრავალი მუმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებსა და მართვებში, ზოგადი სასაზღვრო პირობებითა და ფუნქციონალით, მიღებულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები: უტოლობებისა და ტოლობების სახით საწყისი და საბოლოო მომენტებისთვის, ფაზურ კოორდინატებში შემავალი დაგვიანებებისა და საწყისი ვექტორისთვის; ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპის ფორმით საწყისი და მართვის ფუნქციებისთვის.

Summary

For the nonlinear optimal problem with the discontinuous initial condition and several constant delays in the phase coordinates and controls, with the general boundary conditions and functional, the necessary conditions of optimality are obtained: in the form of equality and inequality for the initial and final moments, for delays containing in the phase coordinates and initial vector; in the form of the integral maximum principle for the initial function and control.

სარჩევი

შესავალი

დოქტორანტის სემინარისთვის განკუთვნილ რეფერატულ ნაშრომში განხილულია ოპტიმალური ამოცანა, რომელიც შედგება შემდეგი კომპონენტებისგან:

დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_s), u(t), u(t-\theta_1), ..., u(t-\theta_k)),\ t \in [t_0, t_1] \subset I, u(t) \in \Omega; \qquad (1)$$

საწყისი პირობა

$$x(t) = \varphi(t), t < t_0, x(t_0) = x_0, \varphi(t) \in \Phi, x_0 \in X_0 \qquad (2)$$

და სასაზღვრო პირობები

$$q^i(t_0, t_1, \tau_1, ..., \tau_s, x_0, x(t_1)) = 0, i = \overline{1, l}; \qquad (3)$$

ფუნქციონალი

$$q^0(t_0, t_1, \tau_1, ..., \tau_s, x_0, x(t_1)) \to \min. \qquad (4)$$

ამრიგად, საჭიროა შევარჩიოთ საწყისი t_0 და საბოლოო t_1 მომენტები, დაგვიანებები $\tau_1, ..., \tau_s$, საწყისი ვექტორი x_0, საწყისი ფუნქცია $\varphi(t)$ და მართვა $u(t)$ ისეთნაირად, რომ დაკმაყოფილებული იქნეს (1)-(3) პირობები და (4) ფუნქციონალს მიენიჭოს მინიმალური მნიშვნელობა.

ნაშრომში , მოყვანილია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები: უტოლობებისა და ტოლობების სახით საწყისი და საბოლოო მომენტებისთვის, ფაზურ კოორდინატებში შემავალი დაგვიანებებისა და საწყისი ვექტორისთვის; ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპის ფორმით საწყისი და მართვის ფუნქციებისთვის. ჩამოთვლილი შედეგები დამტკიცებული იყო [1] მონოგრაფიაში, აქედან გამომდიარე სემინარისთვის განკუთვლილი მასალა (ოპტიმალური ამოცანის დასმის სტილი, ძირითადი შედეგების დამტკიცების სქემა და ა. შ.) აღებულია აღნიშნული მონოგრაფიიდან. ნაშრომში გადმოცემული მასალის საფუძველზე ჩემს მიერ არაერთი ახალი შედეგია მიღებული [2] .

ნაშრომი , შედგება ორი პარაგრაფისგან . პირველ პარაგრაფში მოყვანილია ძირითადი აღნიშვნები და განმარტებები, ჩამოყალიბებულია ძირითადი შედეგები (ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები), საწყისი მომენტის სხვადასხვა მხრიდან ვარიაციის შემთხვევისათვის. მეორე პარაგრაფში, [1]-ში მოყვანილი სქემისა და რ. გამყრელიძისა და გ. ხარატიშვილის კრიტიკულობის აუცილებელი პირობის [3] საფუძველზე დამტკიცებულია ერთერთი ძირითადი თეორემა (დანარჩენი თეორემები ანალოგიურად მტკიცდება).

ნაშრომის ბოლოს მოყვანილია დასკვნა და ლიტერატურის ნუსხა.

1. ამოცანის დასმა და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

1.1. ძირითადი აღნიშვნები. ვთქვათ $O \subset \mathbb{R}^n$ არის ღია სიმრავლე, ხოლო $U \subset \mathbb{R}^r$ - კომპაქტური სიმრავლეა. ვთქვათ $h_{i2} > h_{i1} > 0,\ i = \overline{1,s}$ და $\theta_k > ... > \theta_1 > 0$ არიან მოცემული რიცხვები და $n-$განზომილებიანი ფუნქცია $f(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k)$, $(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k) \in I \times O^{1+s} \times U^{1+k}$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: თითქმის ყველა ფიქსირებული $t \in I = [a,b]$ ფუნქცია $f(t,\cdot): I \times O^{1+s} \times U^{1+k} \to \mathbb{R}^n$ უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადია $(x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k) \in O^{1+s} \times U^{1+k}$-ში; ყოველი ფიქსირებული $(x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k) \in O^{1+s} \times U^{1+k}$ ფუნქცია $f(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k)$, მატრიცები $f_x(t,\cdot), f_{x_i}(t,\cdot), i = \overline{1,s}$ და $f_u(t,\cdot), f_{u_i}(t,\cdot), i = \overline{1,k}$ არიან ზომადი I ინტერვალზე; ნებისმიერი $K \subset O$ და $M \subset U_0$ კომპაქტური სიმრავლეებისათვის არსებობს ფუნქცია $m_{K,M}(t) \in L_1\left(I,[0,\infty)\right)$ ისეთი, რომ

$$\left|f(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k)\right| + \left|f_x(t,x,\cdot)\right| + \sum_{i=1}^{s}\left|f_{x_i}(t,x,\cdot)\right| + \left|f_u(t,x,\cdot)\right| + \sum_{i=1}^{k}\left|f_{u_i}(t,x,\cdot)\right| \le m_{K,M}(t)$$

ყოველი $(x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k) \in K^{1+s} \times U^{1+k}$ - თვის და თითქმის ყველა $t \in I$ -თვის.

ვთქვათ, Φ არის უბან-უბან უწყვეტი $\varphi(t) \in N, t \in I_1 = \left[\hat{\tau}, b\right]$ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნია პირველი გვარის სასრულო რაოდენობა წყვეტის წერტილები, სადაც $\hat{\tau} = a - \max\left\{h_{12},...,h_{s2}\right\}$, $N \subset O$ არის ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლე; Ω არის ზომადი $u(t) \in U, \quad t \in I_2 = [a - \theta_k, b]$ ფუნქციების სიმრავლე; $X_0 \subset O$ არის ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლე. ვთქვათ სკალარული ფუნქციები $q^i(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,x_1), \quad i = \overline{0,l}$ არიან უწყვეტად წარმოებადი $I^2 \times [h_{11},h_{12}] \times ... \times [h_{s1},h_{s2}] \times O^2$ სიმრავლეზე.

1.2. ამოცანის დასმა. ყოველ

$$\nu = (t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u) \in A = (a,b) \times (a,b) \times (h_{11},h_{12}) \times ... \times (h_{s1},h_{s2}) \times X_0 \times \Phi \times \Omega$$

ელემენტს $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე შევუსაბამოთ დაგვიანებულ არგუმენტიანი ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_s),u(t),u(t-\theta_1),...,u(t-\theta_k)), \qquad (1.1)$$
$$t \in [t_0,t_1] \subset I, u \in \Omega,$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t), t\in[\hat{\tau},t_0), x(t_0)=x_0, \varphi\in\Phi, x_0\in X_0. \tag{1.2}$$

(1.2) პირობას ეწოდება წყვეტილი, რადგან საზოგადოდ $x(t_0)\neq\varphi(t_0)$.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ, $\nu=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in A.$ ფუნქციას $x(t)=x(t;\nu)\in O, t\in[\hat{\tau},t_1]$ ეწოდება (1.1) განტოლების ამონახსნი (1.2) წყვეტილი საწყისი პირობით, ან ν ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი და განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_1]$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (1.2) პირობას და აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს განტოლებას თითქმის ყველა t - სათვის $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე.

განსაზღვრება 2. $\nu=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in A$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი $x(t)=x(t;\nu)$ აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$q^i(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,x(t_1))=0, i=\overline{1,l}. \tag{1.3}$$

A_0 -ით აღვნიშნოთ დასაშვები ელემენტების სიმრავლე.

განსაზღვრება 3. $\nu_0=(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},\phi_0,u_0)\in A_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ არსებობს ისეთი $\delta_0>0$ რიცხვი და $K_0\subset O$ კომპაქტური სიმრავლე, რომ ნებისმიერი $\nu\in A_0$ ელემენტისთვის, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა

$$|t_{00}-t_0|+|t_{10}-t_1|+\sum_{i=1}^{s}|\tau_{i0}-\tau_i|+|x_{00}-x_0|+\|\varphi_0-\varphi\|_{I_1}+H(f_0-f;K_0)\le\delta_0,$$

სადაც

$$H(f,K)=\int_I\left[\sup_{(x,x_1,...,x_s)\in K^{s+1}}\left(\left|f\left(t,x,x_1,...,x_s\right)\right|+\left|f_x\left(t,x,\cdot\right)\right|+\sum_{i=1}^{s}\left|f_{x_i}\left(t,x,\cdot\right)\right|\right)\right]dt.$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$q^0(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},x(t_{10}))\le q^0(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,x(t_1)) \tag{1.4}$$

აქ

$$f_0=f_0(t,x,x_1,...,x_s)=f(t,x,x_1,...,x_s,u_0(t),u_0(t-\theta_1),...,u_0(t-\theta_k))$$

და

$$f=f(t,x,x_1,...,x_s)=f(t,x,x_1,...,x_s,u(t),u(t-\theta_1),...,u(t-\theta_k)).$$

(1.1)-(1.4) ამოცანას ეწოდება ოპტიმალური მართვის ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით.

1.3. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა 1. ვთქვათ, v_0 ოპტიმალური ელემენტია და შესრულებული შემდეგი პირობები:

1) $\tau_{s0} > ... > \tau_{10}$ და $t_{00} + \tau_{s0} < t_{10}$, სადაც $\tau_{i0} \in (h_{i1}, h_{i+10}), i = \overline{1, s-1}$;
2) $\theta_i = m_i d, i = \overline{1, \nu}$, სადაც $m_i, i = \overline{1, \nu}$ არიან ნატურალური რიცხვები, $d > 0$ არის ნამდვილი რიცხვი;
3) ფუნქცია $\varphi_0(t)$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი და $\dot{\varphi}_0(t)$ შემოსაზღვრულია;
4) ფუნქცია $f_0(w), w = (t, x, x_1, ..., x_s) \in I \times O^{s+1}$ შემოსაზღვრულია;
5) არსებობს სასრული ზღვარი
$$\lim_{w \to w_0} f_0(w) = f_0^-, w \in (a, t_{00}] \times O^{s+1},$$
სადაც $w_0 = (t_{00}, x_{00}, \varphi_0(t_{00} - \tau_{10}), ..., \varphi_0(t_{00} - \tau_{s0}))$;
6) არსებობს სასრული ზღვრები
$$\lim_{(w_{1i}, w_{2i}) \to (w_{1i}^0 w_{2i}^0)} [f_0(w_{1i}) - f_0(w_{2i})] = f_i,$$
სადაც $w_{1i}, w_{2i} \in I \times O^{s+1}, i = \overline{1, s}$,
$$w_{1i}^0 = (t_{00} + \tau_{i0}, x_0(t_{00} + \tau_{i0}), x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{10}), ..., x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i-10}),$$
$$x_{00}, x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i+10}), ..., x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{s0})),$$
$$w_{1i}^0 = (t_{00} + \tau_{i0}, x_0(t_{00} + \tau_{i0}), x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{10}), ..., x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i-10}),$$
$$\varphi_0(t_{00}), x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i+10}), ..., x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{s0}));$$
7) არსებობს სასრული ზღვარი
$$\lim_{w \to w_{s+1}} f_0(w) = f_{s+1}^-, w \in (t_{00}, t_{10}] \times O^{s+1}, \ w_{s+1} = (t_{10}, x_0(t_{10}), x_0(t_{10} - \tau_{10}), ..., x_0(t_{10} - \tau_{s0})).$$

მაშინ არსებობს $\pi = (\pi_0, ..., \pi_l) \neq 0$ ვექტორი რომლისთვისაც $\pi_0 \leq 0$, და ამონახსნი $\psi(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_n(t))$ განტოლებისა
$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t) f_{0x}[t] - \sum_{i=1}^{s} \psi(t + \tau_{i0}) f_{0x_i}[t + \tau_{i0}], t \in [t_{00}, t_{10}], \psi(t) = 0, t > t_{10}, \tag{1.5}$$
ისეთი, რომ შესრულებულია ქვემოთ მოყვანილი პირობები:

8) პირობა t_{00} და t_{10} მომენტებისთვის:
$$\pi Q_{0t_0} \geq \psi(t_{00}) f_0^- + \sum_{i=1}^{s} \psi(t_{00} + \tau_{i0}) f_{0x_i}[t + \tau_{i0}], \ t \in [t_{00}, t_{10}], \ \psi(t) = 0, \ t > t_{10},$$
სადაც

$$Q_0=\left(q^0,...,q^l\right)^T,\ Q_0=Q\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},x_0(t_{10})\right),\ Q_{0t_0}=\frac{\partial}{\partial t_0}Q_0;$$

9) პირობა $\tau_{i0}, i=\overline{1,s}$ დაგვიანებებისთვის,

$$\pi Q_{0\tau_{i0}}=\psi(t_{00}+\tau_{i0})f_{0i}+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)f_{0x_i}[t]\dot{x}_0(t-\tau_{i0})dt=0,\ i=\overline{1,s};$$

10) პირობა x_{00} ვექტორისთვის,

$$\left(\pi Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right)x_{00}=\max_{x_0\in X_0}\left(\pi Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right)x_0;$$

11) ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი $\varphi_0\left(t\right)$ საწყისი ფუნქციისათვის,

$$\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{0x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi_0\left(t\right)dt=\max_{\varphi(t)\in\Phi}\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{0x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi\left(t\right)dt;$$

12) ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი სამართი $u_0\left(t\right)$ ფუნქციისათვის,

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)f_0\left[t\right]dt=\max_{u(t)\in\Omega}\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)f\left(t,x_0\left(t\right),x_0\left(t-\tau_{10}\right),...,x_0\left(t-\tau_{s0}\right),u\left(t\right),u\left(t-\theta_1\right),...,u\left(t-\theta_k\right)\right)dt;$$

13) პირობა $\psi\left(t\right)$ ფუნქციისათვის,

$$\psi\left(t_{10}\right)=\pi Q_{0x_1}.$$

თეორემა 2. ვთქვათ, ν_0 ოპტიმალური ელემენტია და ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1-ის 1)-4) და 6) პირობები. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვრები

$$\lim_{w\to w_0}f_0(w)=f_0^+,w\in[t_{00},b)\times O^{s+1},\ \ \lim_{w\to w_{s+1}}f_0(w)=f_{s+1}^+,w\in[t_{10},b)\times O^{s+1},\tag{1.6}$$

მაშინ არსებობს $\pi=\left(\pi_0,...,\pi_l\right)\neq 0$ ვექტორი, რომლისთვისაც $\pi_0\le 0,$ და (1.5)-განტოლების ამონახსნი ისეთი, რომ 9)-13) პირობებია შესრულებული. ამასთან,

$$\pi Q_{0t_0}\le\psi\left(t_{00}\right)\hat{f}_0+\sum_{i=1}^{s}\psi\left(t_{00}+\tau_{i0}\right)f_{0i},\ \ \pi Q_{0t_1}\le-\psi\left(t_{10}\right)\hat{f}_{s+1}.$$

თეორემა 3. ვთქვათ, ν_0 ოპტიმალური ელემენტია და ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1-ის პირობები. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვრები $f_0^-=f_0^+:=\hat{f}_0,f_{s+1}^-=f_{s+1}^+:=\hat{f}_{s+1}$. მაშინ არსებობს $\pi=\left(\pi_0,...,\pi_l\right)\neq 0$ ვექტორი, რომლისთვისაც $\pi_0\le 0,$ და (1.5) - განტოლების ამონახსნი ისეთი, რომ 9)-13) პირობებია შესრულებული. ამასთან,

$$\pi Q_{0t_0} = \psi(t_{00})\hat{f}_0 + \sum_{i=1}^{s} \psi(t_{00}+\tau_{i0}) f_{0i}, \quad \pi Q_{0t_1} = -\psi(t_{10})\hat{f}_{s+1}.$$

თეორემა 4. ვთქვათ, ν_0 ოპტიმალური ელემენტია და ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1-ის 1)-5) და 7) პირობები. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვრები

$$\lim_{(w_{1i}, w_{2i}) \to (w_{1i}^0 w_{2i}^0)} \left[f_0(w_{1i}) - f_0(w_{2i}) \right] = f_{0i}^-,$$

სადაც $w_{1i}, w_{2i} \in (a, t_{00}+\tau_{i0}) \times O^{s+1}, i = \overline{1,s}.$ მაშინ არსებობს $\pi = (\pi_0, ..., \pi_l) \neq 0$ ვექტორი, რომლისთვისაც $\pi_0 \leq 0,$ და (1.5) - განტოლების ამონახსნი ისეთი, რომ 9)-13) პირობებია შესრულებული. ამასთან,

$$\pi Q_{0\tau_i} \geq \psi(t_{00}+\tau_{i0}) f_{0i}^- + \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_{0x_i}[t] \dot{x}_0(t-\tau_{i0}) dt = 0, i = \overline{1,s}.$$

თეორემა 5. ვთქვათ, ν_0 ოპტიმალური ელემენტია და ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1-ის 1-5 პირობები. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვრები

$$\lim_{(w_{1i}, w_{2i}) \to (w_{1i}^0 w_{2i}^0)} \left[f_0(w_{1i}) - f_0(w_{2i}) \right] = f_{0i}^+, \text{ სადაც } w_{1i}, w_{2i} \in [t_{00}+\tau_{i0}, b) \times O^{s+1}, i = \overline{1,s}.$$

მაშინ არსებობს $\pi = (\pi_0, ..., \pi_l) \neq 0$ ვექტორი, რომლისთვისაც $\pi_0 \leq 0,$ და (1.5)-განტოლების ამონახსნი ისეთი, რომ 8)-13)პირობებია შესრულებული. ამასთან,

$$\pi Q_{0\tau_i} \leq \psi(t_{00}+\tau_{i0}) f_{0i}^+ + \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_{0x_i}[t] \dot{x}_0(t-\tau_{i0}) dt = 0, i = \overline{1,s}.$$

2. თეორემა 1-ის დამტკიცება

2.1. დამხმარე მტკიცებულებები. ვთქვათ, $K\subset O$ კომპაქტური სიმრავლეა და $\alpha>0$ მოცემული რიცხვია. სივრცეებში, $E_f^{(1)}$ და E_f შესაბამისად განვსაზღვროთ სიმრავლეები

$$W_{K,\alpha}=\left\{\delta f\in E_f:\exists m_{\delta f,K}(l),L_{\delta f,K}(l)\in L_1(I,R_+)\right\},\int_I\left[m_{\delta f,K}\left(l\right)+L_{\delta f,K}\left(l\right)\right]dt\le\alpha.$$

ლემა 1. ვთქვათ, $K_i\subset O,i=1,2,$ კომპაქტური სიმრავლეებია, ამასთან, ვთქვათ $K_1\subset\operatorname{int}K_2$ და $\alpha_1>0$ მოცემული რიცხვია. მაშინ არსებობს რიცხვი $\alpha_2>0$ ისეთი, რომ

$$W_{K_2,\alpha_1}\subset W\left(K_1;\alpha_2\right).$$

ყოველ

$$\kappa=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,f)\in A=(a,b)\times(a,b)\times(h_{11},h_{12})\times...\times(h_{s1},h_{s2})\times X_0\times\Phi\times E_f^{(1)}$$

შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_s)),t\in\left[t_0,t_1\right],$$

საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),t\in[\hat{\tau},t_0),x(t_0)=x_0.$$

განსაზღვრება 4. $\kappa=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,f)\in A$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი ეწოდება $x(t,\mu),\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,f)$ ამონახსნს, განსაზღვრული $\left[\hat{\tau},t_1\right]$ ინტერვალზე და აღინიშნება $x\left(t;\kappa\right)$-ით.

აქედან გამომდინარე,

$$x_0(t)=x(t;\nu_0)=x(t;\kappa_0)=x(t;\mu_0),\ \ t\in\left[\hat{\tau},t_{10}\right],$$

სადაც

$$\kappa_0=(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},\varphi_0,f_0),\ \ \mu_0=(t_{00},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},\varphi_{00},f_0).$$

ლემა 2. ვთქვათ, $\alpha_1>0$ მოცემული რიცხვია და $K_1\subset O$ მოცემული კომპაქტური სიმრავლეა რომელიც შეიცავს $cl\varphi_0(I_1)\cup x_0\left(\left[t_{00},t_{10}\right]\right)$ სიმრავლის მიდამოს. მაშინ არსებობს $\delta_1>0$ ისეთი, რომ ელემენტს

$$\kappa\in V\left(\kappa_0;K_1;\delta_1;\alpha_1\right)=\left(B\left(t_{00};\delta_1\right)\cap I\right)\times\left(B\left(t_{10};\delta_1\right)\cap I\right)\times\left(B\left(\tau_{10};\delta_1\right)\cap(h_{11},h_{12})\right)\times...$$

$$\times\left(B\left(\tau_{s0};\delta_1\right)\cap(h_{s1},h_{s2})\right)\times\left(B\left(x_{00};\delta_1\right)\cap O\right)\times\left(B\left(\varphi_0;\delta_1\right)\cap\Phi\right)\times\left[f_0+\left(W_{K_1,\alpha_1}\bigcap V_{K_1,\delta_1}\right)\right]$$

შეესაბამება ამონახსნი $x(t;\kappa)\in K_1,\ \ t\in\left[\hat{\tau},t_1\right]$. ამასთან, ყოველი $\varepsilon>0$ - თვის, არსებობს $\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\delta_1)$ რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერი $\kappa\in V(\kappa_0;K_1,\delta_1,\alpha_1)$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|x(t_{10};\kappa_0)-x(t_1;\kappa)\right|\le\varepsilon.$$

შენიშვნა 1. ლემა 2 სამართლიანია, თუ $V(\kappa_0;K_1,\delta_1,\alpha_1)$ სიმრავლეს ჩავანაცვლებთ სიმრავლით

$$V(\kappa_0;K_1;\delta_1)=\left(B\left(t_{00};\delta_1\right)\cap I\right)\times\left(B\left(t_{10};\delta_1\right)\cap I\right)\times\left(B\left(\tau_{10};\delta_1\right)\cap(h_{11},h_{12})\right)\times\ldots$$

$$\times\left(B\left(\tau_{s0};\delta_1\right)\cap(h_{s1},h_{s2})\right)\times\left(B\left(x_{00};\delta_1\right)\cap O\right)\times\left(B\left(\varphi_0;\delta_1\right)\cap\Phi\right)\times\left[f_0+W_{K_1,\delta_1}\right]$$

ახლა განვიხილოთ ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე

$$E_\kappa=\mathbb{R}^{2+s+n}PC\left(I_1,\mathbb{R}^n\right)\times E_f^{(1)}$$

$\kappa=(y,\varsigma)$ წერტილებით, სადაც $y=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0)^T,\varsigma=(\varphi,f)$.

სიმრავლე

$$X=\left[a,t_{00}\right]\times\left[t_{00},t_{10}\right]\times\left[h_{11},h_{12}\right]\times\ldots\times\left[h_{s1},h_{s2}\right]\times O\subset\mathbb{R}^{2+s+n}$$

არის $\mathbb{R}^{2+s+n}$ - დან ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლე.

$D_0\subset E_\kappa$-ით აღვნიშნოთ $\kappa\in X\times\Phi\times E_f^{(1)}$ ელემენტების სიმრავლე ისეთი, რომ $x(t;\kappa)$ ამონახსნი შეესაბამება ყოველ მათგანს. D_0 სიმრავლე არაცარიელია, ვინაიდან $\kappa_0\in D_0$.

ლემა 3. D_0 სიმრავლე არის სასრულოდ ამოზნექილი.

ლემა 4. S ასახვა არის დიფერენცირებადი κ_0 წერტილში და

$$dS_{\kappa_0}(\delta\kappa)=\delta x\left(t_{10};\delta\kappa\right)+f_{s+1}^-\delta t_1,\forall\,\delta\kappa=\left(\delta t_0,\delta t_1,\delta\tau_1,...,\delta\tau_s,\delta x_0,\delta\varphi,\delta f\right)\in E_\kappa-\kappa_0,$$

სადაც

$$\delta x\left(t_{10};\delta\kappa\right)=\delta x\left(t_{10};\delta\mu\right)=-\left[Y\left(t_{00};t\right)f_0^-+\sum_{i=1}^{s}Y\left(t_{00}+\tau_{i0};t\right)f_{0i}\right]\delta t_0$$

$$-\sum_{i=1}^{s}\left[Y\left(t_{00}+\tau_{i0};t\right)f_{0i}+\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)f_{0x_i}\left[\xi\right]\dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i+Y\left(t_{00};t\right)\delta x_0$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y\left(\xi+\tau_{i0};t\right)f_{0x_i}\left[\xi+\tau_{i0}\right]\delta\varphi\left(\xi\right)d\xi+\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)\delta f\left[\xi\right]d\xi$$

და $\delta\mu=\left(\delta t_0,\delta\tau_1,...,\delta\tau_s,\delta x_0,\delta\varphi,\delta f\right)\in E_{\mu}^{(1)}-\mu_0$.

2.2. **ასახვის დიფერენცირებადობა** $z_0=\left(0,\kappa_0\right)$ **წერტილში.** განვიხილოთ ვექტორული სივრცე

$$E_z=\mathbb{R}\times E_{\kappa}$$

$z=\left(\xi,\kappa\right)$ წერტილებისა.

შემოვიღოთ სიმრავლეები

$$X=\mathbb{R}_+\times X_0,\;\; D=\mathbb{R}_+\times D_0.$$

სიმრავლე არის სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი $X\times E_{\varsigma}\subset E_z$ ქვესივრცეში (იხ. ლემა 3).

D სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ასახვა

$$P:D\to\mathbb{R}^{l+1}$$

ფორმულით

$$P(z)=Q\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,S(\kappa)\right)+\left(\xi,0,...,0\right)^T,$$

სადაც $Q=q^0,...,q^l$ და $S\left(\kappa\right)=x(t_1;\kappa)$.

ლემა 5. P ასახვა არის დიფერენცირებადი z_0 წერილში და

$$dP_{z_0}(\delta z)=\left\{Q_{0t_0}-Q_{0x_1}Y(t_{00};t_{10})f_0^{-}-\sum_{i=1}^{s}Q_{0x_1}Y(t_{00}+\tau_{i0};t_{10})f_{0i}\right\}\delta t_0+\left\{Q_{0t_1}+Q_{0x_1}f_{s+1}^{-}\right\}\delta t_1$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left[Q_{0\tau_i}-Q_{0x_1}Y\left(t_{00}+\tau_{i0};t_{10}\right)f_{0i}+\int_{t_{00}}^{t_{10}}Q_{0x_1}Y\left(t;t_{10}\right)f_{0x_i}\left[t\right]\dot{x}_0\left(t-\tau_{i0}\right)dt\right]\delta\tau_i$$

$$+\left\{Q_{0x_0}+Q_{0x_1}Y(t_{00};t_{10})\right\}\delta x_0+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Q_{0x_1}Y(t+\tau_{i0};t)f_{0x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\delta\varphi(t)dt$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{10}}Q_{0x_1}Y\left(t;t_{10}\right)\delta f\left[t\right]dt+(\delta\xi,0,...,0)^T,\ \ \delta z=(\delta\xi,\delta\kappa)\in E_z-z_0. \tag{2.1}$$

2.3. Ψ_{z_0} ფილტრის კვაზიამოზნექილობა. P ასახვის უწყვეტობა $co\left[\Psi_{z_0}\right]$ ფილტრზე.

E_z ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში განვსაზღვროთ Ψ_{z_0} ფილტრი, როგორც პირდაპირი ნამრავლი

$$\Psi_{z_0}=\Psi_{\hat{y}_0}\times\Psi_{\varphi_0}\times\Psi$$

ორი ფილტრისა $\Psi_{\hat{y}_0},\hat{y}_0=\left(0,y_0\right)^T$, და Ψ_{φ_0}, რომელიც განისაზღვრება ამოზნექილი ბაზისებით, შესაბამისად,

$\left\{\left(B_0\cap\mathbb{R}_+\right)\times\left(B_{t_{00}}\cap(a,t_{00}]\right)\times\left(B_{t_{10}}\cap(a,t_{10}]\right)\times\left(B_{\tau_{10}}\cap(h_{11},h_{12})\right)\times...\times\left(B_{\tau_{s0}}\cap(h_{s1},h_{s2})\right)\times\left(B_{x_{00}}\cap O\right)\right\}$,
სადაც $B_0,...,B_{x_{00}}$ არიან ამოზნექილი მიდამოები,

$\left\{B_{\varphi_0}\cap\Phi:B_{\varphi_0}\subset PC(I_1,\mathbb{R}^n)\right\}$, B_{φ_0} ამოზნექილი მიდამოა.

(Ψ ფილტრი განმარტებულია [4] -ს 4.3 ქვესექციაში).

არსებობს რიცხვი $\delta_1>0$ ისეთი, რომ სიმრავლე

$$W=\mathbb{R}_+\times\left(\left(B_{t_{00}};\delta_1\right)\cap(a,t_{00}]\right)\times\left(\left(B_{t_{10}};\delta_1\right)\cap(a,t_{10}]\right)\times\left(\left(B_{\tau_{10}};\delta_1\right)\cap(h_{11},h_{12})\right)\times...$$

$$\times\left(\left(B_{\tau_{s0}};\delta_1\right)\cap(h_{s1},h_{s2})\right)\times\left(\left(B_{x_{00}};\delta_1\right)\cap O\right)\times\left(\left(B_{\varphi_0};\delta_1\right)\cap\Phi\right)\times W_{f_0}^{(1)}\left(K_1;\delta_1\right)\subset D$$

და ამასთან ასახვა

$$P:W\to\mathbb{R}_P^{l+1}$$

უწყვეტია E_z-დან ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში. აქ

$$W_{f_0}^{(1)}\left(K_1,\delta_1\right)=\left\{f\in E_f^{(1)}:H(f-f_0:K_1)\le\delta_1\right\}.$$

Ψ ფილტრის W_{K_1,δ_1} ელემენტი შედის ამოზნექილ $W_{f_0}^{(1)}\left(K_1,\delta_1\right)$ სიმრავლეში. ამდენად,

$$co\left(W_{z_0}\right)\subset W\subset D,$$

სადაც

$$W_{z_0}=\mathbb{R}_+\times\left(\left(B_{t_{00}};\delta_1\right)\cap(a,t_{00}]\right)\times\left(\left(B_{t_{10}};\delta_1\right)\cap(a,t_{10}]\right)\times\left(\left(B_{\tau_{10}};\delta_1\right)\cap(h_{11},h_{12})\right)\times\ldots$$

$$\times\left(\left(B_{\tau_{s0}};\delta_1\right)\cap\left(h_{s1},h_{s2}\right)\right)\times\left(\left(B_{x_{00}};\delta_1\right)\cap O\right)\times\left(\left(B_{\varphi_0};\delta_1\right)\cap\Phi\right)\times W_{K_1,\delta_1}\subset\Psi_{z_0}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ არსებობს ელემენტი $W_{z_0}\in\Psi$ ისეთი, რომ ასახვა $P:co\left(W_{z_0}\right)\to\mathbb{R}^{l+1}$ არის უწყვეტი.

ამდენად P ასახვა განსაზღვრულია და უწყვეტია $co\left(\left[\Psi_{z_0}\right]\right)$ ფილტრზე.

2.4. P **ასახვის კრიტიკულობა** Ψ_{z_0} **ფილტრზე.** $z_0=\left(0,\kappa_0\right)$ წერტილი მიეკუთვნება Ψ_{z_0} ფილტრის ყველა ელემენტს, ამასთან,

$$P\left(z_0\right)=\left(q^0\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},\ldots,\tau_{s0},x_{00},x_0\left(t_{10}\right)\right),0,\ldots,0\right)^T.$$

შემოვიღოთ სიმრავლე

$$\mho=\left\{\kappa=\left(t_0,t_1,\tau_1,\ldots,\tau_s,x_0,\varphi,f\right):f=f\left(t,x,x_1,\ldots,x_s,u(t),u(t-\theta_1),\ldots,u(t-\theta_k)\right),\right.$$
$$\left.w=\left(t_0,t_1,\tau_1,\ldots,\tau_s,x_0,\varphi,u\right)\in W_0\right\}.$$

ნებისმიერი $z=\left(\xi,\kappa\right)\in W_{z_0}\cap\left(\mathbb{R}_+\times\mho\right)$ ელემენტისათვის,

სადაც $W_{z_0}\in\Psi_{z_0}$, გვაქვს

$$P\left(z\right)=\left(q^0\left(t_0,t_1,\tau_1,\ldots,\tau_s,x_0,x\left(t_1\right);\kappa\right),0,\ldots,0\right)^T.$$

ელემენტი $w_0\in W_0$ ოპტიმალურია; აქედან გამომდინარე, არსებობს $W_{z_0}\left(K_2,\delta_2\right)\in\Psi_{z_0}$ ელემენტი, სადაც $\delta_2\in(0,\hat{\delta})$ და $K_2\subset O$ არის კომპაქტური სიმრავლე, რომელიც $\hat{K}$-ს შეიცავს ისეთი, რომ ნებისმიერი

$$z\in W_{z_0}\left(K_2,\delta_2\right)\cap\left(\mathbb{R}_+\times\mho\right)$$

ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$q^0\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},\ldots,\tau_{s0},x_{00},x_0\left(t_{10}\right)\right)\le q^0\left(t_0,t_1,\tau_1,\ldots,\tau_s,x_0,x\left(t_1;\kappa\right)\right)+\xi.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$P\left(W_{z_0}\cap\left(\mathbb{R}_+\times\mho\right)\right)\subset\mathbb{R}_0=\left\{\left(p^1,0,...,0\right)^T\in\mathbb{R}^{p+1}\right\}$$

და წერტილი $P(z_0)$ არის საზღვრის წერტილი $P\left(W_{z_0}\left(K_2,\delta_2\right)\cap\left(\mathbb{R}_+\times\mho\right)\right)$ სიმრავლისა $\mathbb{R}_0$ სივრცის მიმართ.

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $P(z_0)\in\partial\left(P\left(W_{z_0}\left(K_2,\delta_2\right)\cap\mathbb{R}_0\right)\right)$ და შესაბამისად, $P(z_0)\in\partial\left(P\left(W_{z_0}\left(K_2;\delta_2\right)\right)\right)$.

2.5. **ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების გამოყვანა.** ვთქვათ შესრულებულია პირობები: ასახვა P უწყვეტია $co\left[\Psi\right]$-ზე და კრიტიკული Ψ -ზე, ამასთან Ψ ფილტრი არის კვაზიამოზნექილი. აქედან გამომდინარე, მაშინ არსებობს $\pi=\left(\pi_0,...,\pi_l\right)\neq 0$ ვექტორი და $\hat{W}_{z_0}\in\Psi_{z_0}$ ელემენტი ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\pi dP_{z_0}(\delta z)\le 0,\forall\delta z\in cone\left(\hat{W}_{z_0}-z_0\right) \tag{2.2}$$

სადაც $P_{z_0}(\delta z)$ - აქვს (2.1) ფორმა.

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\psi\left(t\right)=\pi Q_{0x_1}Y(t;t_{10}); \tag{2.3}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ის აკმაყოფილებს (1.5) განტოლებას და პირობებს

$$\psi\left(t_{10}\right)=\pi Q_{0x_1},\psi\left(t\right)=0,t>t_{10}. \tag{2.4}$$

(2.1), (2.3) და (2.4) გამოსახულებების გათვალისწინებით (2.2)-ში მივიღებთ

$$\left\{\pi Q_{0t_0}-\psi(t_{00})f_0^- -\sum_{i=1}^{s}\psi(t_{00}+\tau_{i0};t_{10})f_{0i}\right\}\delta t_0+\left\{\pi Q_{0t_1}+\psi(t_{10})f_{s+1}^-\right\}\delta t_1$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left[\pi Q_{0\tau_i}-\psi\left(t_{00}+\tau_{i0};t_{10}\right)f_{0i}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)f_{0x_i}\left[t\right]\dot{x}_0\left(t-\tau_{i0}\right)dt\right]\delta\tau_i+\left\{\pi Q_{0x_0}+\psi(t_{00})\right\}\delta x_0$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\psi(t+\tau_{i0};t)f_{0x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\delta\varphi(t)dt+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\delta f\left[t\right]dt+\pi_0\delta\xi\le 0,\;\;\delta z\in cone\left(\hat{W}_{f_0}-z_0\right). \tag{2.5}$$

პირობა $\delta z \in cone\left(\hat{W}_{f_0} - z_0\right)$ ექვივალენტურია პირობების

$$\delta\xi \in R_+,\ \delta t_0 \in (-\infty,0],\ \delta t_1 \in (-\infty,0],\ \delta\tau_i \in R,\ i=\overline{1,s},$$

სადაც

$$\hat{W}_{x_{00}} = B_{x_{00}} \cap X_0,\ \hat{W}_{\varphi_0} = B_{\varphi_0} \cap \Phi \in \Psi_{\varphi_0},\quad \hat{W}_{f_0} \in \Psi_{f_0}.$$

ვთქვათ $\delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau_1 = \ldots = \delta\tau_s = 0$ და $\delta x_0 = \delta\varphi = \delta f = 0$ (2.5)-ში. გვექნება

$$\pi_0 \delta\xi \le 0,\quad \forall \delta\xi \in R_+.$$

საიდანაც

$$\pi_0 \le 0.$$

თუ $\delta\xi = \delta t_0 = \delta\tau_1 = \ldots = \delta\tau_s = 0$ და $\delta x_0 = \delta\varphi = \delta f = 0$ მაშინ იმის გათვალისწინებით, რომ $\delta t_0 \in (-\infty,0]$, (2.5)-დან საწყისი t_{00} მომენტისთვის მივიღებთ პირობას

$$\pi Q_{0t_0} \ge \psi(t_{00}) f_0^- + \sum_{i=1}^{s} \psi(t_{00} + \tau_{i0}) f_{0i}.$$

თუ $\delta\xi = \delta t_0 = \delta\tau_1 = \ldots = \delta\tau_s = 0$ და $\delta x_0 = \delta\varphi = \delta f = 0$ (2.5) უტოლობაში საბოლოო t_{10} მომენტისთვის მივიღებთ პირობას

$$\pi Q_{0t_1} \ge -\psi\left(t_{10}\right) f_{s+1}^-.$$

თუ $\delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = 0$ და $\delta x_0 = \delta\varphi = \delta f = 0,$ მივიღებთ

$$+\sum_{i=1}^{s}\left[\pi Q_{0\tau_i} - \psi\left(t_{00}+\tau_{i0};t_{10}\right) f_{0i} - \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi\left(t\right) f_{0x_i}\left[t\right]\dot{x}_0\left(t-\tau_{i0}\right)dt\right]\delta\tau_i \le 0, \forall \delta\tau_i \in R, i=\overline{1,s}.$$

ზემოთ მოყვანილი პირობებიდან $\tau_{i0}, i=\overline{1,s}$ დაგვიანებებისთვის გვექნება

$$\pi Q_{0\tau_i} = \psi(t_{00}+\tau_{i0}) f_{0i} + \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi\left(t\right) f_{0x_i}[t]\dot{x}_0(t-\tau_{i0})dt, i=\overline{1,s}$$

ვთქვათ $\delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau_1 = \ldots = \delta\tau_s = 0$ და $\delta\varphi = \delta f = 0$ (2.5)-ში. მაშინ

$$\left\{\pi Q_{0x_0} + \psi\left(t_{00}\right)\right\}\delta x_0 \le 0,\ \delta x_0 \in cone\left(\left(B_{x_{00}} \cap X_0\right) - x_{00}\right).$$

დავამტკიცოთ ჩადგმა

$$cone\Big(\Big(B_{x_{00}} \cap X_0\Big) - x_{00}\Big) \supset X_0 - x_{00}.$$

მართლაც. ვთქვათ $x_0 \in X_0$ იყოს ნებისმიერი წერტილი. X_0 სიმრავლე ამოზნექილია, აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი $\varepsilon \in [0,1]$ - თვის, წერტილი $x_\varepsilon = x_{00} + \varepsilon\left(x_0 - x_{00}\right) \in X_0$. მეორე მხრივ, საკმარისად მცირე $\varepsilon > 0$ - თვის, $x_\varepsilon \in B_{x_{00}}$. აქედან $x_\varepsilon - x_{00} = \varepsilon\left(x_0 - x_{00}\right) \in cone\Big(\Big(B_{x_{00}} \cap X_0\Big) - x_{00}\Big)$. საიდანაც მივიღებთ $x_0 - x_{00} \in cone\Big(\Big(B_{x_{00}} \cap X_0\Big) - x_{00}\Big)$. ამდენად

$$\left(\pi Q_{0x_0} + \psi\left(t_{00}\right)\right)x_{00} = \max_{x_0 \in X_0}\left(\pi Q_{0x_0} + \psi\left(t_{00}\right)\right)x_0.$$

ვთქვათ $\delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau_1 = \ldots = \delta\tau_s = 0$ და $\delta x_0 = \delta f = 0.$ გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} \psi(t+\tau_{i0};t) f_{0x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\delta\varphi(t)dt \le 0, \quad \forall \delta\varphi \in cone\Big(\hat{W}_{\varphi_0} - \varphi_0\Big).$$

ანალოგიურად შიძლება დავამტკიცოთ, რომ

$$cone\Big(\hat{W}_{\varphi_0} - \varphi_0\Big) \supset \Phi - \varphi_0.$$

ამდენად,

$$\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} \psi\left(t+\tau_{i0}\right) f_{0x_i}[t+\tau_{i0}]\varphi_0(t)dt = \max_{\varphi(t)\in\Phi_1}\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} \psi\left(t+\tau_{i0}\right) f_{0x_i}[t+\tau_{i0}]\varphi(t)dt.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau_1 = \ldots = \delta\tau_s = 0$ და $\delta x_0 = \delta\varphi = 0.$ (2.5)-დან მივიღებთ

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi\left(t\right)\delta f\left[t\right]dt \le 0, \;\; \delta f \in cone\Big(\hat{W}_{f_0} - f_0\Big).$$

ახლა, უკანასკნელი უტოლობის გამოყენებით დავამტკიცოთ ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი. ამისათვის უნდა დავამტკივოთ ასახვის უწყვეტობა

$$\delta f \to \int_{t_{00}}^{t_{10}} \delta f\left[t\right]dt, \delta f\left[t\right] = \delta f(t, x_0(t), x_0(t-\tau_{10}), \ldots, x_0(t-\tau_{s0})) \qquad (2.6)$$

$W^{(1)}(K_1;\alpha)$ სიმრავლეზე $E_f^{(1)}$-დან ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში. აქ $K_1 \subset O$ არის კომპაქტ სიმრავლე, რომელიც შეიცავს $\varphi_0(I_2) \cup x_0([t_{00}, t_{10}])$ სიმრავლის გარკვეულ მიდამოს და $\alpha > 0$ გარკვეული რიცხვია.

ვთქვათ $\delta f_i \in W^{(1)}(K_1;\alpha), i = 1,2,...$ და $\lim_{i\to\infty} H_0(\delta f_i; K_1) = 0.$ (2.6) ასახვა არის უწყვეტი, თუ

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t)\delta f_i[t]dt = 0. \qquad (2.7)$$

ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \delta\psi(t) f_i[t]dt = \psi(t_{00}) \int_{t_{00}}^{t_{10}} \delta f_i[t]dt - \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) \left(\int_{t_{00}}^{t} \delta f_i[\xi]d\xi \right) dt.$$

გვაქვს

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_{00}}^{t} \delta f_i[\xi]d\xi = 0$$

თანაბრად $t \in [t_{00}, t_{10}]$-ში.

ამდენად ადგილი აქვს (2.7) ტოლობას. (2.6) ასახვის უწყვეტობიდან გვაქვს უტოლობა

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t)\delta f[t]dt \le 0, \ \ \delta f \in cone\left(\left[W^{(1)}(K_1;\alpha) \right]_{\hat{W}_{f0}} - f_0 \right).$$

$$cone\left(\left[W^{(1)}(K_1;\alpha) \right]_{\hat{W}_{f0}} - f_0 \right) \supset F_1 - f_0. \qquad (2.8)$$

(2.8)-დან გამომდინარეობს ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_0[t]dt = \max_{u(t)\in\Omega} \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f\left(t, x_0(t), x_0(t-\tau_{10}), ..., x_0(t-\tau_{s0}), u(t), u(t-\theta_1), ..., u(t-\theta_k)\right) dt.$$

□

დასასრულს შევნიშნოთ, რომ თეორემები 2-5 მტკიცდება ანალოგიური გზით შესაბამისი ამონახსნის ვარიაციის ფორმულებისგამოყენებით.

დ ა ს კ ვ ნ ა

ნაშრომში, ოპტიმალური მართვის ამოცანისათვის მრავალი მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში და თანაზომადი დაგვიანებებით მართვებში, კრიტიკულობის აუცილებელი პირობის გამოყენებით, დამტკიცებულია ოპტიმალურიბის აუცილებელი პირობები: უტოლობებისა და ტოლობების სახით საწყისი და საბოლოო მომენტებისათვის, დაგვიანებებისა და საწყისი ვექტორისათვის; ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპის ფორმით საწყისი და მართვის ფუნქციებისათვის.

ლიტერატურა

1. T. Tadumadze, Variation formulas of solutions for functional differential equations with several constant delays and their applications in optimal control problems, Mem. Diff. Eq. Math. Phys. 70 (2017), 7-97 .

2. Shavadze T. , Necessary Conditions of Optimality for the Optimal Control Problem with Several Delays and the Continuous Initial Condition, http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2018/Shavadze_workshop_2018.pdf, International Workshop QUALITDE – 2018, December 1 – 3, 2018, Tbilisi, Georgia

3. R. V. Gamkrelidze and G. L. Kharatishvili , Extremal problems in linear topological spaces . (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 33 (4) (1969) ,781-839.