

$Q_{1,N}$ - ხარისხების ზოგიერთი სტრუქტურული თვისება

როლანდ ომანაძე

E-mail: roland.omanadze@tsu.ge

ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, მათემა-

ტიკის დეპარტამენტი. ჭავჭავაძის პრ.1, 0218 თბილისი, საქართველო

ტენენბაუმმა (იხ., [3, გვ.159]) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეებზე განსაზღვრა Q -დაყვანადობის ცნება შედეგაირად: A სიმრავლე Q -დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლურად: $A \leq_Q B$) თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f , რომ ყოველი $x \in A$ (სადაც ω აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს), $x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $A \leq_Q B$ f ფუნქციით. თუ $A \leq_Q B$ ისეთი f ფუნქციით, რომ ყოველი x, y -სთვის, $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$ და $\bigcup_{x \in \omega} W_{f(x)}$ არის გამოთვლადი, მაშინ ვიტყვით, რომ A არის $Q_{1,N}$ -დაყვანადი B -ზე, და ვწერთ $A \leq_{Q_{1,N}} B$ (იხ., [1]).

რეკურსიულად გადათვლადი (რ.გ.) სიმრავლე M არის r -მაქსიმალური, თუ $\bar{M}$ არის უსასრულო და ნებისმიერი გამოთვლადი R სიმრავლისათვის $R \cap \bar{M}$ ან $\bar{R} \cap \bar{M}$ არის სასრული. რ.გ. სიმრავლეებისთვის $A \subseteq B$, A არის B სიმრავლის მთავარი ქვესიმრავლე, თუ $B-A$ არის უსასრულო და ყოველი რ.გ. W სიმრავლისათვის $\bar{B} \subseteq^* W \Rightarrow \bar{A} \subseteq^* W$.

ლახლანმა (იხ., [2]) დაამტკიცა, რომ ყოველ არაგამოთვლად რ.გ. სიმრავლეს აქვს მთავარი ქვესიმრავლე.

მოყვანილი აღნიშვნები და ტერმინოლოგია სტანდარტულია და შეიძლება იხილოთ [3,4]-ში.

თეორემა 1. ვთქვათ M არის r -მაქსიმალური სიმრავლე, A არის M სიმრავლის მთავარი ქვესიმრავლე, B არის ნებისმიერი სიმრავლე და $M-A \equiv_{Q_{1,N}} B$. მაშინ $M-A \leq_m B$.

თეორემა 2. რ.გ. $Q_{1,N}$ -ხარისხები არაა მკვრივად დალაგებული.

თეორემა 3. თუ A არის r -მაქსიმალური სიმრავლე და B არის არა- r -მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, მაშინ $A \not\leq_{Q_{1,N}} B$, ან არსებობს არა- r -მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე C და r -მაქსიმალური სიმრავლე D ისეთი, რომ

$$A <_{Q_{1,N}} D <_{Q_{1,N}} C <_{Q_{1,N}} B.$$

თეორემა 4. ვთქვათ A არის Σ_2^0 სიმრავლე, B არის რ.გ. სიმრავლე და $A \leq_Q B$. მაშინ არსებობს რ.გ. სიმრავლე C ისეთი, რომ $A \leq_{Q_{1,N}} C \leq_Q B$.

ლიტერატურა

[1] V.K.Bulitko, On ways of characterizing complete sets, Math. USSR, Izv. 38 (1992), 2.

[2] A.H Lachlan, On the lattice of recursively enumerable sets. Trans. Amer. Math. Soc., 130 (1968), 1-37.

[3] H.Rogers, Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.

[4]. R.I. Soare, Recursively Enumerable Sets and Degrees. Springer, 1987.